Colle 1 – Planche 1
Du 16/06 au 27/09

Questions de cours

Cours 1. Donner l'expression du terme général de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \quad ; \quad u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 2.$$

Cours 2. Donner l'expression du terme général de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4 \quad ; \quad u_0 = 5.$$

Cours 3. Énoncer la formule de Taylor-Young.
Application : retrouver le DL de $x \mapsto \ln(1-x)$ à l'ordre 3 en 0.

Cours 4. Soit $p \geq 1$ un entier. Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = \frac{(1+x)^p}{1+x^p}.$$

Cours 5. Écrire un programme Python qui prend en entrées un entier n et un réel u_0 et renvoie u_n où (u_n) est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1}.$$

Exercices

Exercice 1.

1. Donnez un équivalent simple de $u_n = \ln\left(\ln\left(e + \frac{1}{n}\right)\right)$.
2. Donnez un équivalent simple en 0 de $\dfrac{\ln\left(\cos(x)\right) e^{cos(x)}}{x^2}$.

Exercice 2.

1. Donnez un équivalent simple de $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. Donnez un équivalent simple en $+\infty$ de $e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}}$.

Exercice 3.

1. Donnez un équivalent simple de $u_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.
2. Donnez un équivalent simple en 0 de $x(3+x)\dfrac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}$.

Exercice 4. Pour $n \geq 3$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = x^n - nx + 1, x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet une unique solution. On note ce nombre α_n.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{n} \leq \alpha_n \leq \dfrac{2}{n}$. Quelle est la limite de (α_n) ?
3. Déterminer la limite de $(n\alpha_n)_{n\geq 3}$.

Exercice 5. On définit par récurrence la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est monotone.
2. Montrer qu'elle converge et déterminer sa limite.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2,\ u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}.$$

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq 2\sqrt{n}$.
2. Montrer que u_n est négligeable devant n quand n tend vers $+\infty$ et en déduire un équivalent de u_n.

Exercice 7.

1. Donner le DL à l'ordre 5 en 0 de la fonction g définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sin(x) - x.$$
2. En déduire que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{g(x)}{x^3}$ est prolongeable par continuité en 0. On notera h la fonction ainsi prolongée.
3. Montrer que h est dérivable en 0. Donner l'équation de la tangente à la courbe de h au point d'abscisse 0. Préciser la position (locale) de la courbe par rapport à la tangente. Illustrer par un dessin.

Exercice 8. Déterminer la limite quand x tend vers 0 de $\dfrac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$.

Exercice 9. Déterminer la limite quand x tend vers 0 de $\dfrac{(1+3x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \sin(x)}{1-\cos(x)}$.

Exercice 10. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Étudier la fonction g (parité, variations, limites).
2. (a) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à déterminer.
   (b) Justifier que g^{-1} est dérivable et calculer sa dérivée.
3. Soit y un réel.
   (a) Résoudre l'équation $X^2 - 2yX - 1 = 0$ d'inconnue X.
   (b) En déduire une expression de $g^{-1}(y)$.

Colle 1 – Planche 2
Du 16/06 au 27/09

Questions de cours

Cours 6. Donner l'expression du terme général de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \quad ; \quad u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 0.$$

Cours 7. Donner l'expression du terme général de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + 1 \quad ; \quad u_0 = 2.$$

Cours 8. Énoncer la formule de Taylor-Young.
Application : retrouver le DL de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ à l'ordre 3 en 0.

Cours 9. Étude (ensemble de définition, périodicité, limites, variations) de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1+\sin(x)}$.

Cours 10. Écrire un programme Python qui prend en entrées un entier n et un réel u_0 et renvoie la somme des n premiers termes de la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1}.$$

Exercices

Exercice 11.

1. Donnez un équivalent simple de $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$.
2. Donnez un équivalent simple en $+\infty$ de $\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)}$.

Exercice 12.

1. Donnez un équivalent simple de $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.
2. Donnez un équivalent simple en $+\infty$ de $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)} - 1$.

Exercice 13.

1. Donnez un équivalent simple de $u_n = \sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)}$.
2. Donnez un équivalent simple en 0 de $\tan(x) - \sin(x)$.

Exercice 14. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_n(x) = x^3 + nx - 1.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On notera u_n cette solution.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
4. Trouver un équivalent simple de u_n.

Exercice 15. On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à termes strictement positifs.
2. Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Étudier la limite de la suite.
4. Écrire un programme Python qui demande à l'utilisateur d'entrer un entier naturel n et qui calcule et affiche la valeur de u_n.

Exercice 16. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$$

et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Déterminer les limites (finies) possibles de la suite.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n \in \left[0, \dfrac{7}{16}\right]$.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\left|u_{n+1} - \dfrac{1}{4}\right| \leq \dfrac{7}{8}\left|u_n - \dfrac{1}{4}\right|$.
4. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\left|u_n - \dfrac{1}{4}\right| \leq \left(\dfrac{7}{8}\right)^{n-1} \dfrac{7}{16}$ puis la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 17. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On précisera la valeur en 0.
2. Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
3. Si oui, la dérivée est-elle continue en 0 ?

Exercice 18.

1. Donner le DL à l'ordre 3 en 0 de la fonction g définie par
$$\forall x \geq 0, \quad g(x) = 2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}.$$
2. En déduire la limite en 0 de $\dfrac{2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}}{x^3}$.

Exercice 19. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de :
$$f(x) = \frac{(e^x + e^{-x})\ln(1+x)}{2\cos(x)}.$$
En déduite l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 et préciser la position (locale) de la courbe par rapport à la tangente.

Exercice 20. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

1. Étudier la fonction g (parité, variations, limites).
2. (a) Montrer que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans un intervalle à déterminer.
   (b) Justifier que g^{-1} est dérivable et calculer sa dérivée.
3. Soit $y \geq 1$.
   (a) Résoudre l'équation $X^2 - 2yY + 1 = 0$ d'inconnue Y.
   (b) En déduire une expression de g^{-1}.

Exercice 21. Étude (variation, limite, signe) de la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$\forall x \geq 0, \quad g(x) = (x-2)e^x + x + 2.$$