Colle 2 – Planche 1

Du 30/09 au 04/10

Cours 1. Étudier la nature et, le cas échéant, déterminer la valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3x}{1+x^2}dx$.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 1.$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
2. En déduire les points critiques.
3. (a) Écrire, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + xy$ sous la forme :

$$(x + \dots)^2 - \dots y^2.$$

   (b) En déduire la nature (maximum/minimum/aucun des deux) des points critiques.

Exercice 2. Étudier la nature de l'intégrale :

$$\int_0^1 e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt.$$

Colle 2 – Planche 2
Du 30/09 au 04/10

Cours 2. Étudier la nature et, le cas échéant, déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} dt$.

Exercice 1. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = x^2 + 4xy + y^2 - 2.$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
2. En déduire les points critiques.
3. Montrer que les points critiques de f ne sont pas des extrema.

Exercice 2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}} dt$ est convergente.

Colle 2 – Planche 3
Du 30/09 au 04/10

Cours 3. Déterminer justifier soigneusement le caractère C^1 et calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction f définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}.$$

Exercice 1. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^x} dx$.
Indication : on pourra commencer par montrer que pour tout $x \in [1,+\infty[$, $\ln(x) \leq x$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y,) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = xe^{-x^2-y^2}.$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1.
2. En déduire les points critiques de f.
3. Soit $a > 0$. On pose $g : x \mapsto axe^{-x^2}$.
   (a) Étudier les variations de g.
   (b) En déduire que f possède un maximum et un minimum global.

Colle 2 – Planche 4
Du 30/09 au 04/10

Cours 4. Déterminer justifier soigneusement le caractère C^1 et calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction f définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x^2+y^2)\cos(xy).$$

Exercice 1. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et bornée.

1. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}dx$ sont convergentes.
2. Montrer qu'elles sont égales.
3. Application : pour tout $n \geq 0$ calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)}dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}dx$.

Exercice 2. Soient $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On définit une fonction f de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right) + h\left(\frac{y}{x}\right).$$

1. Dessiner $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.
3. Montrer que f est solution de :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

Colle 2 – Planche 5
Du 30/09 au 04/10

Cours 5. Déterminer la nature, et le cas échéant la valeur, de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx.$$

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y,) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}.$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1.
2. (a) Montrer que l'équation $x = e^{-x}$ admet un unique solution dans $\mathbb{R}$ et que cette solution est dans $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.
   (b) Montrer que f admet un unique point critique (a, b) avec $a - e^{-a} = 0$ et $b = \frac{a}{2}$.
3. Montrer que $f(a, b) = a^2 + \frac{a^2}{2}$.
4. Le point critique est-il un maximum/minimum ?

Exercice 2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}} dt$ est convergente.

Colle 2 – Planche 6
Du 30/09 au 04/10

Cours 6. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t\ln(t)}dt$.

Exercice 3. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = x^2 - x - xy - \frac{y^2}{2} + 2y.$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1.
2. En déduire les points critiques.
3. Possède-t-elle des extrema locaux ? Globaux ?

Exercice 4. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{t+e^{2t}}dt$.

Exercices supplémentaires

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
   — $\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x+t, y+t) = f(x,y)$.
   — Il existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = g(x-y)$.
2. En déduire les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Exercice 6. Étudier la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^4+1} dt$.

Exercice 7. Étudier la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{t+e^{2t}} dt$,
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2+1} dt$.

Exercice 8. Justifier la convergence et calculer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-at} dt$$

où $a > 0$.

Exercice 9. Étudier la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{t}} dt$.
2. $\displaystyle\int_0^1 e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$.

Exercice 10. Justifier la convergence et calculer la valeur de

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}} dt.$$

Exercice 11. Soit $a > 0$. On pose

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que $\Gamma(a)$ est convergente.
2. Démontrer que $\forall a > 0$, $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$