Colle 3bis – Planche 1
Semaine du 04/11 au 08/11

Cours 1. Résoudre $y' = y\ln(y)$ en faisant le changement de fonction $y(t) = e^{z(t)}$.

Exercice 1. Étudier la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin(t)}{t^2}\right) dt$.

Exercice 2. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que :

$$P(x^2+1) = P(x)^2 + 1 \quad \text{et} \quad P(0) = 0.$$

1. Calculer $P(1)$, $P(2)$.
2. Soit $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 1.$$

   (a) Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(u_n) = u_n$.
3. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ tels que :

$$P(x^2+1) = P(x)^2 + 1 \quad \text{et} \quad P(0) = 0.$$

Exercice 3. Soit

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(0) = P'(1)\}.$$

1. Montrer que E est un SEV de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer une famille génératrice de E.
2. Cette famille est-elle libre ?

Colle 3bis – Planche 2
Semaine du 04/11 au 08/11

Cours 2. Trouver toutes les racines et factoriser $X^4 - 2X^3 - 16X^2 + 2X + 15$.

Exercice 1. Déterminer les solutions ne s'annulant pas de

$$y' + 2y - (1+x)\sqrt{y} = 0.$$

Indication : faire le changement de fonction $z = \sqrt{y}$.

Exercice 2. Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt$.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Trouver une famille génératrice de F.
3. Cette famille est-elle libre ?

Colle 3bis – Planche 3

Semaine du 04/11 au 08/11

Cours 3. Résoudre, sur $]0,+\infty[$, l'équation :

$$y' - \frac{1}{t}y = t^2.$$

Exercice 1. Soit $P = X^2 + X + 1$.

1. Montrer que P n'a pas de racine réelle.
2. Trouver un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ et un réel a à déterminer tels que $P = a(Q^2+1)$.
3. En déduire une primitive de $u \mapsto \dfrac{1}{u^2+u+1}$.
4. On considère l'équation différentielle $y' = y^2 + y + 1$. Montrer que les solutions sont les fonctions :

$$\begin{aligned} y_c : \left]-\frac{\pi}{\sqrt{3}} - C ; \frac{\pi}{\sqrt{3}} - C\right[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t+C)\right) \end{aligned}$$

où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit

$$E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - t = 0 \quad \text{et} \quad y = t\right\}.$$

1. Montrer que E est un SEV de $\mathbb{R}^4$ et trouver une famille génératrice de E.
2. Cette famille est-elle libre ?

Colle 3bis – Planche 4
Semaine du 04/11 au 08/11

Cours 4. Factoriser au maximum X^4+1 dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 1. Trouver les solutions ne s'annulant pas de l'équation $y'+y-ty^3=0$.
Indications : on pourra faire le changement de fonction $z=\dfrac{1}{y^2}$.

Exercice 2. Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\sqrt{x})}{x^{\frac{5}{4}}}dx$.

Exercice 3. Soit $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $F=\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\mid AM=MA\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Trouver une famille génératrice de F.
3. Cette famille est-elle libre ?

Colle 3bis – Planche 5
Semaine du 04/11 au 08/11

Cours 5. Résoudre $y' = y\ln(y)$ en faisant le changement de fonction $y(t) = e^{z(t)}$.

Exercice 1. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que :

$$P(x^2+1) = P(x)^2 + 1 \quad \text{et} \quad P(0) = 0.$$

1. Calculer $P(1)$, $P(2)$.
2. Soit $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 1.$$

   (a) Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(u_n) = u_n$.
3. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ tels que :

$$P(x^2+1) = P(x)^2 + 1 \quad \text{et} \quad P(0) = 0.$$

Exercice 2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}} dt$ est convergente.

Exercice 3. Soit

$$E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - t = 0 \quad \text{et} \quad y = t\right\}.$$

1. Montrer que E est un SEV de $\mathbb{R}^4$ et trouver une famille génératrice de E.
2. Cette famille est-elle libre ?

Colle 3bis – Planche 6
Semaine du 04/11 au 08/11

Cours 6. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''-4y'+3y=0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et trouver une famille génératrice.

Exercice 1. On considère l'équation (E_1) $yy' - \left(1+\dfrac{1}{x}\right)y^2 = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. On pose $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$. Déterminer une équation différentielle (E_2) vérifiée par z.
2. Résoudre par la méthode des variables séparées l'équation (E_2) et en déduire les solutions de (E_1).

Exercice 2. Résoudre l'équation suivante d'inconnues $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P \circ P = P.$$

Exercice 3. Soit

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(0) = P'(1)\}.$$

1. Montrer que E est un SEV de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer une famille génératrice de E.
2. Cette famille est-elle libre ?

Exercices supplémentaires

Exercice 4. Résoudre l'équation suivante d'inconnues $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P'^2 = 4P.$$

Exercice 5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un polynôme Q tel que :

$$nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 = (X-1)^2 Q.$$

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme P_n suivant :

$$P_n = nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}.$$

1. Montrer que 2 est une racine multiple de P_n.
2. Déterminer sa multiplicité.

Exercice 7. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ ayant n racines réelles distinctes. Démontrer que toutes les racines de P' sont réelles et simples.

Exercice 8. Résoudre sur $]-1,+\infty[$: $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$.

Exercice 9. Étudier la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^4+1} dt.$
2. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^t}{t+e^{2t}} dt,$
3. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2+1} dt,$
4. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1-\sqrt{t}} dt,$

Exercice 10. Résoudre l'équation suivante d'inconnues $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P \circ P = P.$$