

Colle 3 – Planche 1
Semaine du 14/10 au 18/10

Cours 1. Résoudre $y' = y \ln(y)$ en faisant le changement de fonction $y(t) = e^{z(t)}$.

Exercice 1. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P(X^2) = (X^2 + 1)P(X).$$

Exercice 2. Étudier la nature de $\int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{\sin(t)}{t^2} \right) dt$.

Exercice 3. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$P = X^8 - 1.$$

Colle 3 – Planche 2
Semaine du 14/10 au 18/10

Cours 2. Trouver toutes les racines et factoriser $X^4 - 2X^3 - 16X^2 + 2X + 15$.

Exercice 1. Déterminer les solutions ne s'annulant pas de

$$y' + 2y - (1 + x)\sqrt{y} = 0.$$

Indication : faire le changement de fonction $z = \sqrt{y}$.

Exercice 2. Étudier la nature de $\int_0^1 e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$.

Colle 3 – Planche 3
Semaine du 14/10 au 18/10

Cours 3. Résoudre, sur $]0, +\infty[$, l'équation :

$$y' - \frac{1}{t}y = t^2.$$

Exercice 1. Soit $P = X^2 + X + 1$.

1. Montrer que P n'a pas de racine réelle.
2. Trouver un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ et un réel a à déterminer tels que $P = a(Q^2 + 1)$.
3. En déduire une primitive de $u \mapsto \frac{1}{u^2 + u + 1}$.
4. On considère l'équation différentielle $y' = y^2 + y + 1$. Montrer que les solutions sont les fonctions :

$$y_c : \left] -\frac{\pi}{\sqrt{3}} - C; \frac{\pi}{\sqrt{3}} - C \right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t + C) \right)$$

où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Résoudre l'équation suivante d'inconnues $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P \circ P = P.$$

Colle 3 – Planche 4
Semaine du 14/10 au 18/10

Cours 4. Factoriser au maximum $X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 1. Trouver les solutions ne s'annulant pas de l'équation $y' + y - ty^3 = 0$.

Indications : on pourra faire le changement de fonction $z = \frac{1}{y^2}$.

Exercice 2. Etudier la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x^{\frac{5}{4}}} dx$.

Colle 3 – Planche 5
Semaine du 14/10 au 18/10

Cours 5. Résoudre $y' = y \ln(y)$ en faisant le changement de fonction $y(t) = e^{z(t)}$.

Exercice 1. Résoudre l'équation suivante d'inconnues $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P \circ P = P.$$

Exercice 2. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}} dt$ est convergente.

Exercice 3.

Colle 3 – Planche 6
Semaine du 14/10 au 18/10

Cours 6. Résoudre l'équation :

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Exercice 1. On considère l'équation (E_1) $yy' - \left(1 + \frac{1}{x}\right)y^2 = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. On pose $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. Déterminer une équation différentielle (E_2) vérifiée par z .
2. Résoudre par la méthode des variables séparées l'équation (E_2) et en déduire les solutions de (E_1) .

Exercice 2.

Exercices supplémentaires

Exercice 3. Résoudre l'équation suivante d'inconnues $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P'^2 = 4P.$$

Exercice 4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un polynôme Q tel que :

$$nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 = (X-1)^2Q.$$

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme P_n suivant :

$$P_n = nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}.$$

1. Montrer que 2 est une racine multiple de P_n .
2. Déterminer sa multiplicité.

Exercice 6. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ ayant n racines réelles distinctes. Démontrer que toutes les racines de P' sont réelles et simples.

Exercice 7. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que :

$$P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1 \quad \text{et} \quad P(0) = 0.$$

1. Calculer $P(1)$, $P(2)$.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 1.$$

- (a) Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(u_n) = u_n$.
3. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ tels que :

$$P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1 \quad \text{et} \quad P(0) = 0.$$

Exercice 8. Résoudre sur $] -1, +\infty[$: $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$.

Exercice 9. Étudier la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^4 + 1} dt.$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{t + e^{2t}} dt,$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2 + 1} dt,$
4. $\int_0^1 \frac{1}{1 - \sqrt{t}} dt,$