**Colle 4 – Planche 1**
Semaine du 12/11 au 15/11

**Cours 1.** On considère le problème de Cauchy suivant sur $[0, 10]$ :

$$(G) \qquad y' = y \ln\left(\frac{1}{y}\right) \quad \text{et} \quad y(0) = y_0$$

Écrire une fonction `Euler` prenant en entrée en entier $n$ et renvoyant la suite $(y_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ obtenue par la méthode d'Euler.

**Exercice 1.** Les ensembles $F$ suivants sont-ils des SEV de $E$ ?

1. $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P' + P'' \ ; \ P \in \mathbb{R}[X]\}$,
2. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$.

**Exercice 2.** Soit

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(0) = P'(1)\}\,.$$

1. Montrer que $E$ est un SEV de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer une famille génératrice de $E$.
2. Cette famille est-elle libre ?

**Exercice 3.** Résoudre $yy' - y' = e^x$.

**Colle 4 – Planche 2**
Semaine du 12/11 au 15/11

**Cours 2.** Étudier la liberté de $((X-1)(X+1),(X+1)(X-2),(X-1)(X-2))$.

**Exercice 1.** Résoudre par séparation des variables, l'équation différentielle : $y' + e^y = 0$.

**Exercice 2.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

1. Montrer que $F$ est un espace vectoriel.
2. Trouver une famille génératrice de $F$.
3. Cette famille est-elle libre ?

**Exercice 3.** Les ensembles $F$ suivants sont-ils des SEV de $E$ ?

1. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(0) = f(1)\}$,
2. $E = \mathbb{C}^2$, $F = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2\ ;\ xy = 1\}$.

**Colle 4 – Planche 3**
Semaine du 12/11 au 15/11

**Cours 3.** Montrer que l'ensemble suivant est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et trouver une famille génératrice :

$$\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(1) = 0\}.$$

**Exercice 1.** Résoudre, par séparation des variables, l'équation différentielle $y' = 1 + y^2$.

**Exercice 2.** Les ensembles $F$ suivants sont-ils des SEV de $E$ ?

1. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $F$ le sous-ensemble des suites convergentes,
2. $E = \mathbb{C}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \ ; \ x + iy = 0\}$,

**Exercice 3.** Soit

$$E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - t = 0 \quad \text{et} \quad y = t\right\}.$$

1. Montrer que $E$ est un SEV de $\mathbb{R}^4$ et trouver une famille génératrice de $E$.
2. Cette famille est-elle libre ?

**Colle 4 – Planche 4**
Semaine du 12/11 au 15/11

**Cours 4.** On considère le problème de Cauchy suivant sur $[0, 10]$ :

$$(G) \qquad y' = y \ln\left(\frac{1}{y}\right) \quad \text{et} \quad y(0) = y_0$$

Écrire une fonction `Euler` prenant en entrée en entier $n$ et renvoyant la suite $(y_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ obtenue par la méthode d'Euler.

**Exercice 1.** On note $E$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \; ; \; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. (a) Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une famille génératrice de $E$.
   (b) Déterminer une base de $E$ et en déduire sa dimension.
   (c) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les coordonnées de $\begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ dans la base trouvée à la question précédente.

**Exercice 2.** Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y' = |y|$.

**Exercice 3.** Les ensembles $F$ suivants sont-ils des SEV de $E$ ?

1. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \leq 0\}$, $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq 0\}$, $F \cap G$ ? $F \cup G$ ?
2. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ f \text{ monotone}\}$,

**Colle 7 – Planche 5**
Semaine du 12/11 au 15/11

**Cours 5.** Résoudre sur $]-1,+\infty[$ : $(1+x)y'+y=1+\ln(1+x)$.

**Exercice 1** (Ecricome 2008)**.** A tout triplet $(a,b,c)$ de réels, on associe la matrice $M(a,b,c)$ définie par :

$$M(a,b,c)=\begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

On désigne par $E$ l'ensemble des matrices $M(a,b,c)$ où $a$, $b$, $c$ sont des réels. Ainsi :

$$E=\{M(a,b,c) \text{ avec } a,b,c \text{ réels}\}$$

1. Montrer que $E$ est un espace vectoriel
2. Donner une base de $E$ ainsi que sa dimension.

**Exercice 2.** Résoudre par séparation des variables, l'équation différentielle : $y'+e^y=0$.

**Exercice 3.** Soit

$$E=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid 2x+y-t=0 \quad \text{et} \quad y=t\right\}.$$

1. Montrer que $E$ est un SEV de $\mathbb{R}^4$ et trouver une famille génératrice de $E$.
2. Cette famille est-elle libre ?

**Colle 4 – Planche 6**

Semaine du 12/11 au 15/11

**Cours 6.** Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''-4y'+3y=0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et trouver une famille génératrice.

**Exercice 1.** Les ensembles $F$ suivants sont-ils des SEV de $E$ ?

1. $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(0)=f(1)\}$,
2. $E=\mathbb{C}^2$, $F=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2\ ;\ xy=1\}$.

**Exercice 2.** Résoudre $yy'-y'=e^x$.

**Exercice 3.** Soit

$$E=\{P\in\mathbb{R}_3[X]\mid P(0)=P'(1)\}\,.$$

1. Montrer que $E$ est un SEV de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer une famille génératrice de $E$.
2. Cette famille est-elle libre ?

**Exercices supplémentaires**

**Exercice 4.** Soient $F$ et $G$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x - 2y + z = 0\} \\ G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x - y + 2z = 0\}. \end{aligned}$$

1. Donner une base de $F$, une base de $G$, en déduire leur dimension respective.
2. Donner une base de $F \cap G$, et donner sa dimension.
3. Montrer que la famille constituée des vecteurs de la base de $F$ et des vecteurs de la base de $G$ trouvées en 1 est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
4. Est-elle libre ?

**Exercice 5.** Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X];\ P(a) = 0\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{B} = \{(X-a)X^k;\ 0 \leq k \leq n-1\}$ est une base de $F$.
2. Quelle est la dimension de $F$ ?
3. Donner les coordonnées de $(X-a)^n$ dans cette base.

**Exercice 6.** Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ et $a$, $b$ deux réels distincts. On désigne par $F$ l'ensemble des polynômes de $E$ dont $a$ et $b$ sont racines. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$. En donner une base.