Colle 5 – Planche 4

Semaine du 25/11 au 29/11

Cours 1. Critère de convergence des séries géométriques et preuve.

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X];\ P(a) = 0\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{B} = \{(X-a)X^k;\ 0 \leq k \leq n-1\}$ est une base de F.
2. Quelle est la dimension de F ?
3. Donner les coordonnées de $(X-a)^n$ dans cette base.

Exercice 2. Déterminer la nature et, le cas échéant, donner la somme, des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n\frac{3^{n+1}}{5^{2n-1}}$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^{3n-1}}{(n+1)!}$.

Colle 5 – Planche 2
Semaine du 25/11 au 29/11

Cours 2. Extraire de la famille $((1,0,2),(1,1,2),(1,2,2),(2,2,2))$ une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1. Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x - 2y + z = 0\} \\ G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x - y + 2z = 0\}. \end{aligned}$$

1. Donner une base de F, une base de G, en déduire leur dimension respective.
2. Donner une base de $F \cap G$, et donner sa dimension.
3. Montrer que la famille constituée des vecteurs de la base de F et des vecteurs de la base de G trouvées en 1 est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
4. Est-elle libre ?

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et F l'ensemble des (u_n) suites de E telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Trouver une base de F et en déduire sa dimension.
3. Soit $u = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $w = (3^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Déterminer le rang de la famille (u, v, w).

Colle 5 – Planche 3

Semaine du 25/11 au 29/11

Cours 3. Déterminer le rang de $\big(1+X, 2X+X^2, X^3, X^3+X^2-1\big)$.

Exercice 1. Soit $E=\mathbb{R}_4[X]$ et a, b deux réels distincts. On désigne par F l'ensemble des polynômes de E dont a et b sont racines. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. En donner une base.

Exercice 2. Déterminer la nature et, le cas échéant, donner la somme, des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n\frac{3^{2n+1}}{n!}$.

Exercices supplémentaires

Exercice 3. Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$,
2. $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$,
3. $\mathcal{F}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 4. Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$;
2. $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 5. Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos(x).$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Déterminer une base de E et en déduire sa dimension.

Exercice 6. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : xx^n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.
2. En déduire la dimension de E.

Exercice 7. Soit $E = \mathcal{F}(]-1, 1[, \mathbb{R})$. On considère les fonctions définies sur $]-1, 1[$ par :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad ; \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad ; \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Déterminer le rang de (f_1, f_2, f_3, f_4).

Exercice 8.
1. Montrer que : $\forall n > 1$,$\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.
2. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right)_{n \geq 1}$ est majorée.
3. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Exercice 9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2^n} \geq \frac{n}{2}$.
3. Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ n'est pas majorée et en déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

Exercice 10. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{2^n}$ et, le cas échéant, calculer sa somme.