Colle 5bis – Planche 1

Semaine du 02/12 au 07/12

Cours 1. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$.

Exercice 1. Déterminer la nature et, le cas échéant, donner la somme, des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n\frac{3^{n+1}}{5^{2n-1}}$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^{3n-1}}{(n+1)!}$.

Exercice 2. Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+3n^3}$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)$.

Exercice 3. Déterminer le rang de

$$\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\-1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\0\\2\end{pmatrix}\right)$$

Colle 5bis – Planche 2
Semaine du 02/12 au 07/12

Cours 2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

Exercice 1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n(n+3)}{3^{n+2}}$ converge et calculer sa somme.

Même question avec $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{2^n}$.

Exercice 2. Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{\ln(n)}{n^2}\right)^n$;
2. $\sum_{n\geq 1} (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et F l'ensemble des (u_n) suites de E telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Trouver une base de F et en déduire sa dimension.
3. Soit $u = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $w = (3^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Déterminer le rang de la famille (u, v, w).

Colle 5bis – Planche 3
Semaine du 02/12 au 07/12

Cours 3. Déterminer le rang de $\big(1+X, 2X+X^2, X^3, X^3+X^2-1\big)$.

Exercice 1. Déterminer la nature et, le cas échéant, donner la somme, des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n\frac{3^{2n+1}}{n!}$.

Exercice 2. Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}+2}{n^{\frac{3}{2}}}$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sqrt{\frac{n^2+1}{n^4-n^3+1}}$.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-u_n}u_n$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \ln(u_n)$. Déterminer la somme partielle d'ordre n de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ en fonction de v_{n+1}.
3. En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exercices supplémentaires

Exercice 4. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto x^n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre.
2. En déduire la dimension de E.

Exercice 5. Soit $E = \mathcal{F}(]-1,1[, \mathbb{R})$. On considère les fonctions définies sur $]-1,1[$ par :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad ; \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad ; \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Déterminer le rang de (f_1, f_2, f_3, f_4).

Exercice 6. Étudier la nature de $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n\sqrt{n}+1}$.

Exercice 7. Soit (u_n) une suite à termes positifs et posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

1. On suppose que $\displaystyle\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
   (a) Montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$.
   (b) En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n \geq 0} v_n$.
2. On suppose que $\displaystyle\sum_{n \geq 0} v_n$ converge. Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Exercice 8. On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{n} e^{-u_n}.$$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 < u_n < \dfrac{1}{n}$.
   (b) En déduire un équivalent de u_{n+1} puis la nature de $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n$.
2. (a) Montrer : $(-1)^{n+1} u_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} - (-1)^{n+1} \dfrac{u_n}{n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$.
   (b) (**) En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n \geq 1} (-1)^n u_n$.