

Colle 6 – Planche 1
Semaine du 03/12 au 13/12

Cours 1. Nature de la série $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)$.

Exercice 1. Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2 + 3n^3}$;
2. $\sum_{n \geq 1} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)$.

Exercice 2. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient une boule blanche, une boule verte et $N - 2$ boules rouges numérotées de 1 à $N - 2$. On tire successivement et sans remise les N boules de l'urne. On note X_1 la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule blanche et X_2 la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule verte.

1. Soit i et j deux entiers naturels compris entre 1 et N . Montrer que

$$P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \begin{cases} \frac{1}{N(N-1)} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

2. En déduire les lois de X_1 et X_2 .

Colle 6 – Planche 2
Semaine du 03/12 au 13/12

Cours 2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

Exercice 1. Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n} + 2}{n^{\frac{3}{2}}}$;
2. $\sum_{n \geq 1} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Exercice 2. On dispose de trois urnes U_1 , U_2 et U_3 et d'une infinité de jetons numérotés 1, 2, 3, 4 ...

On répartit un par un les jetons dans les urnes : pour chaque jeton, on choisit au hasard et avec équiprobabilité une des trois urnes dans laquelle on place le jeton. Le placement de chaque jeton est indépendant de tous les autres jetons et la capacité des urnes en nombre de jetons n'est pas limitée.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n (respectivement Y_n , Z_n) le nombre de jetons présents dans l'urne 1 (respectivement l'urne 2, l'urne 3) après avoir réparti les n premiers jetons. Pour tout entier naturel n non nul, on note V_n l'événement : « après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Justifier que X_n , Y_n et Z_n suivent la même loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - (b) Expliciter $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n)$.
 - (c) Justifier que $[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] = [X_n = n]$.
 - (d) Exprimer l'événement V_n à l'aide des événements $[X_n = 0]$, $[Y_n = 0]$ et $[Z_n = 0]$.
 - (e) En déduire que : $P(V_n) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
2. On note V l'événement : « au moins l'une des trois urnes reste toujours vide ».
Exprimer l'événement V à l'aide des événements V_n puis démontrer que $P(V) = 0$.

Colle 6 – Planche 3
Semaine du 03/12 au 13/12

Cours 3. Montrer qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{2^i}.$$

Calculer la probabilité de l'ensemble des nombres impaires pour cette probabilité.

Exercice 1. Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{\ln(n)}{n^2}\right)^n$;
2. $\sum_{n \geq 1} \sqrt{\frac{n^2 + 1}{n^4 - n^3 + 1}}$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-u_n} u_n$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \ln(u_n)$. Déterminer la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ en fonction de v_{n+1} .
3. En déduire la nature de $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Exercices supplémentaires

Exercice 3. Étudier la nature de $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n\sqrt{n} + 1}$.

Exercice 4. Soit (u_n) une suite à termes positifs et posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$.

1. On suppose que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
 - (a) Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.
 - (b) En déduire la nature de $\sum_{n \geq 0} v_n$.
2. On suppose que $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge. Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Exercice 5. On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{n} e^{-u_n}.$$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 < u_n < \frac{1}{n}$.
 (b) En déduire un équivalent de u_{n+1} puis la nature de $\sum_{n \geq 1} u_n$.
2. (a) Montrer : $(-1)^{n+1} u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} - (-1)^{n+1} \frac{u_n}{n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{n} \right)$.
 (b) (**) En déduire la nature de $\sum_{n \geq 1} (-1)^n u_n$.

Exercice 6. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient une boule blanche, une boule verte et $N - 2$ boules rouges numérotées de 1 à $N - 2$. On tire successivement et sans remise les N boules de l'urne. On note X_1 la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule blanche et X_2 la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule verte. Enfin, on note $X = \min(X_1, X_2)$.

1. Montrer que : $\forall k \in \llbracket 1; N - 1 \rrbracket, P(X > k) = \frac{N - 2}{N} \times \frac{N - 3}{N - 1} \times \cdots \times \frac{N - k - 1}{N - k + 1}$.
2. En déduire, pour tout $k \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket, P(X = k) = \frac{2(N - k)}{N(N - 1)}$.

Exercice 7. Dans tout l'exercice, X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que les deux variables X et Y sont **échangeables** si :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X = i] \cap [Y = j]) = P([X = j] \cap [Y = i]).$$

1. On suppose que X et Y sont deux variables indépendantes et de même loi.
 Montrer que X et Y sont échangeables.
2. On suppose que X et Y sont échangeables. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad P(X = i) = P(Y = i).$$