Colle 6 – Planche 1

Semaine du 06/01 au 10/01

Cours 1. Soit X une VAD définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X = k) = 2\frac{1}{3^k}.$$

Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance. Calculer cette espérance.

Exercice 1. Un insecte pond des œufs. Le nombre d'œufs pondus est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque œuf a une probabilité p d'éclore, indépendante des autres œufs et on note Z le nombre d'œufs qui ont éclos.

1. Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}_{[X=n]}(Z = k)$.
2. En déduire la loi de Z.
3. La variable Z possède-t-elle une espérance ? Une variance ? Si oui, les calculer.

Exercice 2. Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad f(P) = P - XP'.$$

1. Montrer que f est une endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$. L'application f est-elle injective ?
3. Déterminer une famille base de $\mathrm{Im}(f)$. L'application f est-elle surjective ?

Colle 6 – Planche 2

Semaine du 06/01 au 10/01

Cours 2. Loi géométrique : définition, espérance et variance, expérience de référence.

Exercice 1. Une urne contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire (avec $N \geq 3$). On effectue une succession infinie de tirages **avec remise** dans l'urne. On admet qu'on obtient presque-sûrement au moins une boule blanche et au moins une boule noire lors de ces tirages.
On note T la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
On note U la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
Par exemple, si les tirages ont donné successivement : noire, noire, noire, blanche, blanche, noire,..., alors $T = 4$ et $U = 1$.

1. Préciser les valeurs prises par T puis montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$P(T=k) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}.$$

2. Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance que l'on calculera.
3. Les variables aléatoires T et U sont-elles indépendantes ?

Exercice 2. Le but de cet exercice est l'étude de l'application Φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ (avec n un entier fixé non nul) par :

$$\Phi : P(X) \longmapsto P(X+1) - P(X)$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que pour tout polynôme non constant P de degré k avec k un entier non nul, $\Phi(P)$ est un polynôme de degré $k-1$.
3. Calculer le noyau de Φ.
4. Donner l'image de Φ.
5. Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\Phi(Q) = P$. Montrer que :

$$\sum_{i=0}^{n} P(i) = Q(n+1) - Q(0).$$

Colle 6 – Planche 3

Semaine du 06/01 au 10/01

Cours 3. Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 1. On dispose d'une pièce de monnaie donnant Pile avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.
On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Faces obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. (a) Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.
   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P\left([X = n]\right) = (n + 1)\dfrac{4}{3^{n+2}}$.
2. La variable aléatoire X possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
3. Écrire une fonction python qui simule la variable X en utilisant la commande `rd.rand()` du module `numpy.random` importé sous l'alias `rd`.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \quad f((x, y, z, t)) = \begin{pmatrix} 2x - t & y + t \\ 3x + z & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base de son noyau et une base de son image.
3. Est-elle surjective ? Injective ?
4. Compléter les familles précédentes en une base de $\mathbb{R}^4$ et de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ respectivement.

Exercices supplémentaires

Exercice 3. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient une boule blanche, une boule verte et $N-2$ boules rouges numérotées de 1 à $N-2$. On tire successivement et sans remise les N boules de l'urne . On note X_1 la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule blanche et X_2 la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule verte. Enfin, on note $X = \min(X_1, X_2)$.

1. Montrer que : $\forall k \in [\![1; N-1]\!]$, $P(X > k) = \dfrac{N-2}{N} \times \dfrac{N-3}{N-1} \times \cdots \times \dfrac{N-k-1}{N-k+1}$.
2. En déduire, pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{2(N-k)}{N(N-1)}$.

Exercice 4. Dans tout l'exercice, X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que les deux variables X et Y sont **échangeables** si :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X=i] \cap [Y=j]) = P([X=j] \cap [Y=i]).$$

1. On suppose que X et Y sont deux variables indépendantes et de même loi.
   Montrer que X et Y sont échangeables.
2. On suppose que X et Y sont échangeables. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad P(X=i) = P(Y=i).$$

Exercice 5. Pierre et Quentin jouent au jeu suivant. On tire un nombre entier naturel X au hasard suivant une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Si X est impair, Pierre gagne et reçoit X euros de Quentin. Si X est pair supérieur ou égal à 2, Quentin gagne et reçoit X euros de Pierre. Si $X = 0$, la partie est nulle. On note p la probabilité que Pierre gagne et q la probabilité que Quentin gagne.

1. En calculant $p + q$ et pq, déterminer la valeur de p et de q.
2. Déterminer l'espérance des gains de chacun.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$ il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_x}(x) = 0_E$.
Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montre qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ soit libre.
2. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer :

$$f \circ g = g \circ f \iff g \in \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, f, \ldots, f^{n-1}).$$