Colle 7bis – Planche 1
Semaine du 20/01 au 27/01

Cours 1. Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.

Exercice 1. Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad f(P) = P - XP'.$$

1. Montrer que f est une endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$. L'application f est-elle injective ?
3. Déterminer une famille base de $\mathrm{Im}(f)$. L'application f est-elle surjective ?
4. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et ψ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. Déterminer le rang de A. Est-ce que ψ un automorphisme ?
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $\psi((x, y, z))$.
3. On note $u = (1, -1, 0)$, $v = (0, 1, -1)$ et $w = (1, 1, 1)$.
   (a) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer $\psi(u)$, $\psi(v)$ et $\psi(w)$. En déduire la matrice de ψ dans la base (u, v, w).
   (c) En déduire que A est semblable à une matrice diagonale D que l'on précisera et donner une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}AP$.
4. Avec la matrice D, déterminer une base de $\ker(\psi)$ et une base de $\mathrm{Im}(\psi)$.

Colle 7bis – Planche 2
Semaine du 20/01 au 27/01

Cours 2.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ où $\mathcal{B} = (1, X+1, X^2+X+1)$.
Déterminer $f(X^2-1)$.

Exercice 1. Le but de cet exercice est l'étude de l'application Φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ (avec n un entier fixé non nul) par :

$$\Phi : P(X) \longmapsto P(X+1) - P(X)$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que pour tout polynôme non constant P de degré k avec k un entier non nul, $\Phi(P)$ est un polynôme de degré $k-1$.
3. Calculer le noyau de Φ.
4. Donner l'image de Φ.
5. Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique.
6. Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\Phi(Q) = P$. Montrer que :

$$\sum_{i=0}^{n} P(i) = Q(n+1) - Q(0).$$

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$ et en déduire M^n pour tout $n \geq 2$.

Colle 7bis – Planche 3
Semaine du 20/01 au 27/01

Cours 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(0), \dots, P(n)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \quad f((x,y,z,t)) = \begin{pmatrix} 2x-t & y+t \\ 3x+z & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base de son noyau et une base de son image.
3. Est-elle surjective ? Injective ?
4. Compléter les familles précédentes en une base de $\mathbb{R}^4$ et de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ respectivement.

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f.
2. (a) Montrer que la famille (X, X^2+1, X^2-1) est une base $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer la matrice M' de f dans cette base.
   (c) Déterminer une matrice P telle que $M' = P^{-1}MP$.

Exercices supplémentaires

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$ il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_x}(x) = 0_E$.
Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montre qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ soit libre.
2. Justifier que la famille ci-dessus est une base de E et déterminer la matrice de f dans cette base.
3. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer :

$$f \circ g = g \circ f \iff g \in \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, f, \ldots, f^{n-1}).$$

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et f un endomorphisme de E. On suppose que $\dim(\ker(f - \mathrm{id}_E)) = n - 1$.

1. On note $G = \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$. Montrer que G est stable par f (c'est-à-dire que pour tout $x \in G$, $f(x) \in G$).
2. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in G$, $f(x) = \lambda x$.
3. On suppose dans cette question que $\lambda \neq 1$.
   (a) Soit $\mathcal{B}$ une base de $\ker(f - \mathrm{id}_E)$ et $\mathcal{B}'$ une base de G. Montrer que $\mathcal{B}'' = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une base de E.
   (b) Déterminer la matrice de f dans cette base.
4. On suppose dans cette question que $\lambda = 1$.
   (a) Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de $\ker(f - \mathrm{id}_E)$ tel que (e_{n-1}) est une base de G.
   (b) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) - x = e_{n-1}$ puis que la famille $(e_1, \ldots, e_{n-1}, x)$ est une base de E.
   (c) Déterminer la matrice de f dans la base ci-dessus.