Colle 8 – Planche 1

Semaine du 27/01 au 31/01

Cours 1. Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ est une densité.

Soit X une variable à densité de densité f ; déterminer sa fonction de répartition.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \neq 0$. On considère la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$ et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est $A(\alpha)$.
   (a) Déterminer le noyau de $g = f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.
   (b) Déterminer l'image de g et en déduire :
   $$\mathrm{Im}(g) \subset \ker(g).$$
2. Réciproquement, soit f en endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que :
   $$\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \subset \ker(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \quad \text{et} \quad \dim(\ker(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})) = n - 1.$$
   Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ et un réel $\alpha \neq 0$ tels que :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A(\alpha).$$

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad F(y) = \frac{1}{1 + e^{-y}}.$$

1. Montrer que X est à densité et déterminer une densité de X.
2. La variable aléatoire X possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Colle 8 – Planche 2
Semaine du 27/01 au 31/01

Cours 2. Lois exponentielles.

Exercice 1. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.
Le but de l'exercice est de montrer que M et D sont semblables.

1. Rappeler la définition de matrices semblables.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M.
   (a) Déterminer une base de $\ker(f - \mathrm{id})$.
   (b) Déterminer une base de $\ker(f - 2\mathrm{id})$ et une base de $\ker(f + 4\mathrm{id})$.
   (c) Démontrer que la famille obtenue en concaténant ces bases est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (d) Déterminer la matrice de f dans cette base.
3. Conclure

Exercice 2. Soit c un réel positif et la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{(1+x)^4} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner une valeur de c pour que f soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
2. Soit X une v.a de densité f.
   (a) X possède-t-elle une espérance ?
   (b) X possède-t-elle une variance ?
   (c) Calculer la fonction de répartition de X.

Colle 8 – Planche 3
Semaine du 27/01 au 31/01

Cours 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(0), \dots, P(n)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Exercice 1. Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels. On note $B_n = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad b_{i,j} = \begin{cases} a_i & \text{si } j + i = n + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner B_2, B_3.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B_n.
   (a) Déterminer f.
   (b) Déterminer une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) A quelle(s) condition(s) sur les réels $a_1, \dots, a_n$ cette famille est-elle une base ?
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les réels $a_1, \dots, a_n$ pour que B_n soit inversible et déterminer son inverse.

Exercice 2. Soit c une constante > 0 et la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{c \ln x}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que $x \mapsto \dfrac{1}{1+\alpha} x^{\alpha+1}(\ln x - \dfrac{1}{1+\alpha})$est une primitive de $x \mapsto x^\alpha \ln x$ sur $]0, +\infty[$.
2. Donner une valeur de c pour que f soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
3. Soit X une v.a de densité f.
   (a) X possède-t-elle une espérance ?
   (b) X possède-t-elle une variance ?
   (c) Calculer la fonction de répartition de X.

Exercices supplémentaires

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$ il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_x}(x) = 0_E$.
Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montre qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ soit libre.
2. Justifier que la famille ci-dessus est une base de E et déterminer la matrice de f dans cette base.
3. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer :
$$f \circ g = g \circ f \iff g \in \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, f, \ldots, f^{n-1}).$$

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et f un endomorphisme de E. On suppose que $\dim(\ker(f - \mathrm{id}_E)) = n - 1$.

1. On note $G = \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$. Montrer que G est stable par f (c'est-à-dire que pour tout $x \in G$, $f(x) \in G$).
2. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in G$, $f(x) = \lambda x$.
3. On suppose dans cette question que $\lambda \neq 1$.
   (a) Soit $\mathcal{B}$ une base de $\ker(f - \mathrm{id}_E)$ et $\mathcal{B}'$ une base de G. Montrer que $\mathcal{B}'' = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une base de E.
   (b) Déterminer la matrice de f dans cette base.
4. On suppose dans cette question que $\lambda = 1$.
   (a) Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de $\ker(f - \mathrm{id}_E)$ tel que (e_{n-1}) est une base de G.
   (b) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) - x = e_{n-1}$ puis que la famille $(e_1, \ldots, e_{n-1}, x)$ est une base de E.
   (c) Déterminer la matrice de f dans la base ci-dessus.