Colle 8bis – Planche 1
Semaine du 03/02 au 07/02

Cours 1. Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ est une densité.

Soit X une variable à densité de densité f ; déterminer sa fonction de répartition.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad F(y) = \frac{1}{1+e^{-y}}.$$

1. Montrer que X est à densité et déterminer une densité de X.
2. La variable aléatoire X possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 2. La variable $\dfrac{1}{1+e^{-X}}$ possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Colle 8 – Planche 2

Semaine du 03/02 au 07/02

Cours 2. Lois exponentielles.

Exercice 1. Soit c un réel positif et la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{(1+x)^4} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner une valeur de c pour que f soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
2. Soit X une v.a de densité f.
   (a) X possède-t-elle une espérance ?
   (b) X possède-t-elle une variance ?
   (c) Calculer la fonction de répartition de X.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer que X est à densité et déterminer une densité.

Colle 8bis – Planche 3

Semaine du 03/02 au 07/02

Cours 3. Soit X une variable de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. La variable e^X possède-t-elle une espérance ?

Exercice 1. Soit c une constante > 0 et la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{c \ln x}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que $x \mapsto \dfrac{1}{1+\alpha} x^{\alpha+1}(\ln x - \dfrac{1}{1+\alpha})$ est une primitive de $x \mapsto x^\alpha \ln x$ sur $]0, +\infty[$.
2. Donner une valeur de c pour que f soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
3. Soit X une v.a de densité f.
   (a) X possède-t-elle une espérance ?
   (b) X possède-t-elle une variance ?
   (c) Calculer la fonction de répartition de X.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Montrer que X est à densité et déterminer une densité de X.

Exercices supplémentaires

Exercice 3. Soient a et b deux réels strictement positifs et $X \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(b)$ deux variables aléatoires indépendantes.

1. On pose $U = \max(X, Y)$. Déterminer la fonction de répartition de U.
2. On pose $V = \min(X, Y)$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de V.
   (b) Reconnaître la loi de V.

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. (a) Montre que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
   (b) Déterminer la fonction de répartition de X.
2. (a) Déterminer la loi de $Y = X^2$.
   (b) En déduire que X admet un moment d'ordre 4 et le calculer.

Exercice 5 (Loi log-normal)**.** On note φ la densité continue associée à la loi normale centrée réduite et Φ la fonction de répartition correspondante. Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Soit F la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} \Phi\left(\dfrac{\ln(x) - \mu}{\theta}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Vérifier que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X. On dit que X suit la loi $LN(\mu, \theta)$.
2. Soient c et α deux réels strictement positifs. Montrer que $Y = cX^\alpha$ suit aussi une loi LN dont on précisera les paramètres.
3. Montrer que $\ln(X)$ suit une loi normale dont on précisera les paramètres.