Colle 9 – Planche 1
Semaine du 10/02 au 15/02

Cours 1. Soit X une variable de loi uniforme sur $[-1,1]$. Déterminer la loi de X^2.

Exercice 1. Soit X de loi exponentielle de paramètre 1. La variable $\dfrac{1}{1+e^{-X}}$ possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. (a) Montre que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
   (b) Déterminer la fonction de répartition de X.
2. (a) Déterminer la loi de $Y = X^2$.
   (b) En déduire que X admet un moment d'ordre 4 et le calculer.

Colle 9 – Planche 2
Semaine du 10/02 au 15/02

Cours 2. Soit X et Y deux variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et indépendantes. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 1.

1. (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ converge et déterminer sa valeur.
   (b) En déduire qu'il existe une réel k (à préciser) tel que la fonction f définie par
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   est une densité de probabilité.
2. On note X une variable aléatoire de densité f et on pose $Y = \ln(X)$.
   (a) Justifier que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Y.
   (b) Montrer que Y possède une espérance et donner sa valeur.

Exercice 2. Soit X et Y deux variables aléatoires de loi normale centrée réduite et indépendante. Montrer que $X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 2)$.

Colle 9 – Planche 3
Semaine du 10/02 au 15/02

Cours 3. Soit X une variable de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. La variable e^X possède-t-elle une espérance ?

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad F(y) = \frac{1}{1+e^{-y}}.$$

1. Montrer que X est à densité et trouvé une densité.
2. Soit U une variable suivant la loi uniforme sur $]0,1[$. On pose $Z = \ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de Z.
   (b) En déduire la loi de Z.
   (c) En déduire une fonction Python simulant X à partir de la commande `rd.rand()`.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Montrer que X est à densité et déterminer une densité de X.

Exercices supplémentaires

Exercice 3. Soient a et b deux réels strictement positifs et $X \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(b)$ deux variables aléatoires indépendantes.

1. On pose $U = \max(X, Y)$. Déterminer la fonction de répartition de U.
2. On pose $V = \min(X, Y)$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de V.
   (b) Reconnaître la loi de V.

Exercice 4 (Loi log-normal)**.** On note φ la densité continue associée à la loi normale centrée réduite et Φ la fonction de répartition correspondante. Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Soit F la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} \Phi\left(\dfrac{\ln(x) - \mu}{\theta}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Vérifier que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X. On dit que X suit la loi $LN(\mu, \theta)$.

2. Soient c et α deux réels strictement positifs. Montrer que $Y = cX^\alpha$ suit aussi une loi LN dont on précisera les paramètres.
3. Montrer que $\ln(X)$ suit une loi normale dont on précisera les paramètres.