Colle 10 – Planche 1
Semaine du 10/03 au 15/03

Cours 1. Trouver le spectre de $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (5x + y - z, 2x + 4y - 2z, x - y + 3z).$$

1. Trouver le spectre de f et une base de chaque sous espace-propre.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Si oui, le diagonaliser.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n urnes numérotées de 1 à n et on suppose que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne $n^\circ k$ contient k boules numérotées de 1 à k (indiscernables). On choisit au hasard une urne parmi les n (uniformément) puis, dans cette urne on tire au hasard une boule (uniformément). On note X_n la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et N_n la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule tirée.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$ et $N_n(\Omega)$.
2. Pour tout $j \in X_n(\Omega)$, déterminer la loi de N_n sachant $[X_n = j]$.
3. En déduire la loi de (X_n, N_n).
4. Déterminer la loi de N_n puis calculer son espérance.

Colle 10 – Planche 2

Semaine du 10/03 au 15/02=3

Cours 2. Soit X et Y de loi conjointe donnée par :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{e^{-2}2^{j-i}}{j!}.$$

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le spectre de A et une base de chaque sous-espace propre.
2. La matrice est-elle diagonalisable ? Si oui trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}AP$.

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad P\left([X = i, Y = j]\right) = \frac{1}{2^{i+j}}.$$

1. Déterminer les marginales.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Colle 10 – Planche 3
Semaine du 10/03 au 15/03

Cours 3. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes. Trouver la loi de $X+Y$.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouver le spectre de A et déterminer une base de chaque sous-espace propre.
2. Justifier que A est diagonalisable et trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}AP$.

Exercice 2. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient une boule blanche, une boule verte et $N-2$ boules rouges numérotées de 1 à $N-2$. On tire successivement et sans remise les N boules de l'urne . On note X_1 la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule blanche et X_2 la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule verte.

1. Soit i et j deux entiers naturels compris entre 1 et N. Montrer que
$$P\left([X_1 = i] \cap [X_2 = j]\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{N(N-1)} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$
2. En déduire les lois de X_1 et X_2.

Exercices supplémentaires

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé et suivant une loi uniforme discrète sur $[\![1, n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la loi de $X+Y$ (pour calculer $P([X+Y=k])$, on distinguera le cas où $k \leq n+1$ et le cas où $k > n+1$).
2. $X+Y$ possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 4. On tire simultanément deux boules au hasard d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 3$). On appelle I la variable aléatoire égale au plus petit des numéros obtenues et S la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus.

1. Déterminer la loi du couple (I, S).
2. En déduire la loi de I ainsi que celle de S.
3. Les variables I et S sont-elles indépendantes ?

Exercice 5. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X=i, Y=j]) = \frac{e^{-1}}{(i+j+1)!}.$$

1. Déterminer et reconnaître la loi de $X+Y$.
2. Calculer $P([X=0])$.

Exercice 6. Soit $p \in]0,1[$. Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux variables aléatoires indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p. Déterminer la covariance de $(G_1 - G_2, G_1 + G_2)$