Colle 10bis – Planche 1
Semaine du 17/03 au 21/03

Cours 1. Donner et prouver la formule la variance d'une somme de deux variables aléatoires discrètes.

Exercice 1. Marguerite la vache s'ennuie un peu dans son pré. Pour passer le temps, elle regarde passer les véhicules sur la route : elle remarque que trois camions sur quatre sont suivis par une voiture alors qu'une voiture sur cinq est suivie par un camion.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose X_n la variable aléatoire valant 1 si le n-ième véhicule observé par Marguerite est un camion et 2 sinon.

1. Trouver une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}$
2. (a) Déterminer les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de A.
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
   (c) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'expression de M^n.
3. En déduire une expression de $\mathbb{P}(X_n = 1)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_0 = 1)$ et $\mathbb{P}(X_0 = 2)$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n urnes numérotées de 1 à n et on suppose que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne $n^\circ k$ contient k boules numérotées de 1 à k (indiscernables).
On choisit au hasard une urne parmi les n (uniformément) puis, dans cette urne on tire au hasard une boule (uniformément). On note X_n la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et N_n la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule tirée.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$ et $N_n(\Omega)$.
2. Pour tout $j \in X_n(\Omega)$, déterminer la loi de N_n sachant $[X_n = j]$.
3. En déduire la loi de (X_n, N_n).
4. Déterminer la loi de N_n puis calculer son espérance.

Colle 10bis – Planche 2
Semaine du 17/03 au 21/03

Cours 2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes. Trouver la loi de $X+Y$.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le spectre de A et une base de chaque sous-espace propre.
2. La matrice est-elle diagonalisable ? Si oui trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}AP$.

Exercice 2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P\left([X = i, Y = j]\right) = \frac{e^{-1}}{(i+j+1)!}.$$

1. Déterminer et reconnaître la loi de $X+Y$.
2. Calculer $P\left([X = 0]\right)$.

Colle 10bis – Planche 3
Semaine du 17/03 au 21/03

Cours 3. Soit X et Y de loi conjointe donnée par :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{e^{-2}2^{j-i}}{j!}.$$

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouver le spectre de A et déterminer une base de chaque sous-espace propre.
2. Justifier que A est diagonalisable et trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}AP$.
3. Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + w_n \\ w_{n+1} & = & -v_n \end{array} \right.$$

   et $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et $w_0 = -1$.
   Déterminer une expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé et suivant une loi uniforme discrète sur $[\![1, n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la loi de $X + Y$ (pour calculer $P([X + Y = k])$, on distinguera le cas où $k \leq n + 1$ et le cas où $k > n + 1$).
2. $X + Y$ possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercices supplémentaires

Exercice 3. On tire simultanément deux boules au hasard d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 3$). On appelle I la variable aléatoire égale au plus petit des numéros obtenues et S la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus.

1. Déterminer la loi du couple (I, S).
2. En déduire la loi de I ainsi que celle de S.
3. Les variables I et S sont-elles indépendantes ?

Exercice 4. Soit $p \in]0, 1[$. Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux variables aléatoires indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p. Déterminer la covariance de $(G_1 - G_2, G_1 + G_2)$

Exercice 5. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad P\left([X = i, Y = j]\right) = \frac{1}{2^{i+j}}.$$

1. Déterminer les marginales.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?