Colle 11 – Planche 1

Semaine du 23/03 au 28/03

Cours 1. Montrer qu'une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Exercice 1. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (*il faut y arriver en moins de 10min*).

Exercice 2. Soit X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$.

1. Déterminer la loi de $X+Y$.
2. En déduire $\mathbb{P}(X+Y=Z)$.

Colle 11 – Planche 2

Semaine du 24/03 au 28/03

Cours 2. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes de loi $\mathcal{G}(p)$. Déterminer la loi de $\min(X_1, \dots, X_n)$.

Exercice 1. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (*il faut y arriver en moins de 10min*).

Exercice 2. On considère F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + t = 0 \quad \text{et} \quad x + y + 2z - t = 0\}.$$

1. Trouver une base de F.
2. Déterminer le projeté orthogonal de $u = (1, 8, 1, 1)$ sur F.
3. En déduire la distance de u à F.
4. Trouver une base de $F^\perp$.

Colle 11 – Planche 3
Semaine du 24/03 au 28/03

Cours 3. Soit $e_1, \dots, e_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Montrer :

$$F^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in [\![1, p]\!] \quad \langle x, e_i \rangle = 0\}.$$

Exercice 1. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (*il faut y arriver en moins de 10min*).

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé et suivant une loi uniforme discrète sur $[\![1, n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la loi de $X + Y$ (pour calculer $P([X + Y = k])$, on distinguera le cas où $k \leq n + 1$ et le cas où $k > n + 1$).
2. $X + Y$ possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercices supplémentaires

Exercice 3. Soit $p \in]0,1[$. Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux variables aléatoires indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p. Déterminer la covariance de $(G_1 - G_2, G_1 + G_2)$

Exercice 4. Marguerite la vache s'ennuie un peu dans son pré. Pour passer le temps, elle regarde passer les véhicules sur la route : elle remarque que trois camions sur quatre sont suivis par une voiture alors qu'une voiture sur cinq est suivie par un camion.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose X_n la variable aléatoire valant 1 si le n-ième véhicule observé par Marguerite est un camion et 2 sinon.

1. Trouver une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}$
2. (a) Déterminer les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de A.
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
   (c) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'expression de M^n.
3. En déduire une expression de $\mathbb{P}(X_n = 1)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_0 = 1)$ et $\mathbb{P}(X_0 = 2)$.

Exercice 5. Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 = z + t\}.$$

1. Déterminer une base de G et en déduire une base orthogonale de G.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur G.
3. Déterminer la distance d'un élément (x, y, z, t) à G.

Exercice 6. On considère les sous-espaces F et G de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid xy + 2z + t = 0 \quad \text{et} \quad x + 2y + 3zt = 0\}$$

$$G = \mathrm{Vect}((1, 1, 1, 0), (2, 1, 1, 1)).$$

Déterminer une base de $F^\perp$ et de $G^\perp$.