Agro-Veto – Planche 1

Exercice avec préparation

Soit $n \geq 2$ un entier. On note H_n la matrice carrée d'ordre n telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ le terme de la ligne i, colonne j de H_n est $\dfrac{1}{i+j-1}$.

Par exemple $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

1. Montrer que H_n est diagonalisable dans une base orthornormale de vecteurs propres.
2. Écrire une fonction Python qui, pour un n donné renvoie H_n et l'inverse du produit de ses valeurs propres. La tester pour $n = 3$.
3. Déterminer de manière exacte les valeurs propres de H_2.
4. Montrer que H_2 et H_3 sont inversibles.
5. On note Φ l'application qui, à tout n-uplet $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ associe le polynôme :

$$\phi(a) = a_1 + a_2 X + \cdots + a_n X^{n-1}$$

   Montrer que ϕ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
6. On pose $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 (P(t))^2 dt = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j-1}$.

   Indication : $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_i b_j$.
7. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à H_n.
   Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ on note $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire de x et y.
   (a) Montrer que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad \langle f(e_i), e_j \rangle = \dfrac{1}{i+j-1}$.
   (b) Montrer que si $x = (a_1, \ldots, a_n) \quad \langle f(x), x \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j-1}$.
   (c) En déduire que $\langle f(x), x \rangle \geq 0$ puis que les valeurs propres de H_n sont strictement positives.

Éléments de correction–Planche 1

Exercice avec préparation

Soit $n \geq 2$ un entier. On note H_n la matrice carrée d'ordre n telle que $\forall (i,j) \in [\![,]\!]^2$ le terme de la ligne i, colonne j de H_n est $\dfrac{1}{i+j-1}$.

Par exemple $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

1. La matrice H_n est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable dans une base orthornormale : il existe une base orthonormale de l'espace formée de vecteurs propres de H_n.
2. La fonction `H(n)` retourne la matrice H_n, on utilise `np.linalg.eig` pour obtenir les valeurs propres et enfin, on en calcule le produit par une boucle simple.

```python
import numpy as np

def H(n):
    mat = np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            mat[i,j] = 1/(i+j+1)  #Attn au décalage d'indices !!!
    return mat

def inv_prod_vp_H(n):
    M = H(n)
    vp,vecp = np.linalg.eig(M)
    iprod  =1
    for i in range(vp.shape[0]):
        iprod = iprod/vp[i]
    return iprod
```

   En testant pour $n = 3$, on trouve que ce produit est entier et vaut 2160.
3. Un complexe λ est valeur propre de la matrice H_2 si et seulement si $\det(H_2 - \lambda I) = 0$ (caractérisation par le déterminant de la non-inversibilité d'une matrice 2×2, c'est à dire si et seulement si
$$(1-\lambda)(\frac{1}{3} - \lambda) - \frac{1}{4} = 0.$$
   En développant, le spectre de H_2 est donc l'ensemble des racines de $\lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{12}$ dont le discriminant est $\frac{16}{9} - \frac{1}{3} = \frac{13}{9}$ et les racines $\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{13}}{6}$. L'inverse du produit des valeurs propres est 12.
4. Aucune valeur propre de H_2 n'est nulle, H_2 est donc inversible.

Échelonnons H_3 pour montrer qu'elle est inversible :

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{4}{15} \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{16}{15} \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{15} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 3 donc H_3 est inversible.

5. L'application Φ qui, à tout n-uplet $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ associe le polynôme :

$$\phi(a) = a_1 + a_2X + \cdots + a_nX^{n-1}$$

est un isomorphisme par définition de ce qu'est un polynôme dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

6. On pose $P = a_1 + a_2X + \cdots + a_nX^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_kX^{k-1}$. On a, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$P(t)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_kt^{k-1}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_kt^{k-1}.\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell t^{\ell-1} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_ka_\ell t^{k+\ell-2}$$

Une primitive de $P(t)^2$ (qui s'annule en 0) est donc

$$t \mapsto \sum_{k=1}^{n}.\sum_{\ell=1}^{n} \frac{a_ka_\ell}{k+\ell-1}t^{k+\ell-1}$$

et finalement $\displaystyle\int_0^1 (P(t))^2dt = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_ia_j}{i+j-1}$.

7. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à H_n.
Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ on note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire de x et y.
   (a) On a

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad \langle f(e_i), e_j\rangle = \frac{1}{i+j-1}$$

car, par définition de H_n et la construction d'une matrice d'application linéaire, on a

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1}e_j$$

et $\mathcal{B}$ est orthonormée (les coordonnée sur la base $\mathcal{B}$ s'obtiennent en prenant les produits scalaires avec les vecteurs de la base).

   (b) Par définition du produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, si $x = (a_1, \dots, a_n)$, les composantes (coordonnées dans la base canonique) de

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_if(e_i) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i+j-1}\right)e_j$$

sont claires dans cette écriture et donc

$$\langle f(x), x\rangle = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i+j-1}\right)a_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_ia_j}{i+j-1}.$$

(c) Cette quantité $\langle f(x), x\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)^2\, dt$ est positive et ne s'annule que si P est nul, c'est à dire $x = 0$.

Si λ est une valeur propre de H_n, associé à un vecteur propre $x \neq 0$. On a

$$0 < \langle f(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2$$

et donc $\lambda > 0$.

Agro-Veto – Planche 2

Question de cours

Énoncer la loi faible des grands nombres.

Exercice avec préparation

Rappel : algorithme de dichotomie. *Soit g une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. On suppose que $g(a)g(b) \leq 0$ si bien que g s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.*
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

— *$a_0 = a$ et $b_0 = b$.*

— *Pour tout ek $\in \mathbb{N}$, on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ et : $\begin{cases} a_{k+1} = a_k,\ b_{k+1} = c_k & si\ g(a_k)g(c_k) \leq 0 \\ a_{k+1} = c_k,\ b_{k+1} = b_k & si\ g(a_k)g(c_k) > 0 \end{cases}$*

On sait alors que les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ sont adjacentes et convergent toutes les deux vers un certain $c \in [a,b]$ vérifiant $g(c) = 0$. On a par ailleurs l'estimation :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |c - c_k| \leq \frac{|b-a|}{2^{k+1}}.$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}.$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution notée α.
2. En utilisant des valeurs approchées de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ obtenues à l'aide de Python, justifier que $\dfrac{1}{3} \leq \alpha \leq \dfrac{1}{2}$.
3. En utilisant l'algorithme de dichotomie, écrire une fonction qui prend en argument un entier n, deux réels a et b et la fonction f, et qui renvoie α à 10^{-n} près.
4. Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2(x+1)} & \text{si } x > \alpha, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Montrer que Φ est une densité de probabilité.
5. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\Phi(t)\, dt$ converge absolument.
6. Montrer que $\forall t > \alpha,\ f'(t) = t\Phi(t) - \dfrac{1}{t^2}$.
7. Soit X une variable aléatoire admettant Φ pour densité. Calculer l'espérance de X de deux manières différentes et en donner un encadrement par deux entiers consécutifs.

Éléments de correction–Planche 2

Exercice avec préparation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}.$$

1. Étudions la fonction f, qui est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle de définition. On a

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{x(x+1) - x^2 - (x+1)}{x^2(x+1)} = -\frac{1}{x^2(x+1)} < 0$$

   La fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ avec limites

   — En 0^+,

$$f(x) = \underbrace{\ln x}_{\to -\infty} + \underbrace{\ln(x+1)}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to +\infty}$$

   Il faut lever l'indétermination

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{x}(x\ln x + 1)}_{\to +\infty} + \underbrace{\ln(x+1)}_{\to 0} \to +\infty$$

   où on utilise la limite (croissance comparée) $x \ln x \to 0$ lorsque $x \to 0^+$.

   — En $+\infty$,

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}_{\sim \frac{1}{x} \to 0} \to 0$$

   Par le théorème de la bijection continue, la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui même (dessiner le tableau variation) et, comme $1 \in \mathbb{R}_+^*$, l'équation $f(x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

2. On a

   — $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 2 = 2 - \ln(3) < 1$, car $\ln(3) \simeq 1.1$,

   — $f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) - \ln\left(\frac{4}{3}\right) + 3 = 3 - 2\ln(2) > 1$, car $\ln(2) \simeq 0.7$.

   Valeurs obtenues par Python :

```
> np.log(3)
1.0986122886681098

> np.log(2)
0.6931471805599453
```

   Il vient donc $\frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$.

3. ```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return np.log(x)-np.log(x+1)+1/x

def dichotomie(f,a,b,n):
    """
    Effectue une dichotomie pour resoudre f(x)=1 en partant de a,b
    retour avec precision 10**(-n)
    """
    def g(x):
        return f(x)-1

    c=(a+b)*0.5
    if g(a)*g(b)>0:
        return "Erreur!" #On devrait lever une exception ...
    while np.abs(b-a)>10**(-n):
        print(a,b,c,g(a),g(b),g(c))
        if g(a)*g(c)>0:
            a=c
        else:
            b=c
        c=(a+b)*0.5
    return c

#Test
print("Valeur de alpha à 10E-5 près:",dichotomie(f,1/2,1/3,5))
```

   Une valeur de $\alpha$ à $10^{-5}$ près retournée par le script est 0.46593.

4. Soit $\Phi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2(x+1)} & \text{si } x > \alpha, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   — La fonction $\Phi$ est clairement positive sur $\mathbb{R}$,
   — Elle est continue sur $\mathbb{R}$, sauf, probablement, en $\alpha$,
   — On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\ dx = \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{x^2(x+1)}\ dx = [-f(x)]_{\alpha}^{+\infty} = f(\alpha) = 1.$$

   La fonction $\Phi$ est donc une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

5. On a

$$x\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(x+1)} & \text{si } x > \alpha, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Et donc

$$\forall x \geq \alpha \quad 0 \leq x\Phi(x) \leq \frac{1}{x^2}.$$
```

Comme $\int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{1}{\alpha}$, par le théorème de comparaison, l'intégrale généralisée (intégrande clairement positive et continue) $\int_\alpha^{+\infty} t\Phi(t)\, dt$ est convergente.

Vu que $t\Phi(t)$ est nulle sur $]-\infty, \alpha]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t\Phi(t)\, dt$ est absolument convergente.

En particulier, X (cf question suivante) admet une espérance.

6. Pour $t > \alpha$, $f'(t) = -\frac{1}{t^2(1+t)} = \frac{1}{t(1+t)} - \frac{1}{t^2} = t\Phi(t) - \frac{1}{t^2}$.
7. Soit X une variable aléatoire admettant Φ pour densité. On a vu que X admet une espérance et

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\Phi(t)\, dt = \int_\alpha^{+\infty} t\Phi(t)\, dt$$

— Première méthode :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) = \int_\alpha^{+\infty} t\Phi(t)\, dt &= \int_\alpha^{+\infty} f'(t)\, dt - \int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt \\ &= -f(\alpha) + \frac{1}{\alpha} \\ &= \ln(1+\alpha) - \ln(\alpha) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right).\end{aligned}$$

On a donc $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\alpha} - 1$, et comme $0.4 \leq \alpha \leq 0.5$ alors $2 \leq \frac{1}{\alpha} \leq 5/2 = 2.5$ et finalement

$$1 \leq \mathbb{E}(X) \leq 2.$$

— Deuxième méthode : utiliser la décomposition

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$$

et donc

$$\mathbb{E}(X) = \ln(1+\alpha) - \ln(\alpha) = \ln(1 + \frac{1}{\alpha}).$$

Agro-Veto – Planche 3

Exercice avec préparation

On définit la fonction numérique f sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \int_0^1 \frac{\cos(t)}{x+t}\,dt.$$

1. (a) Proposer une fonction `Python` prenant en argument un réel x strictement positif et retournant une approximation de $f(x)$.
   (b) Proposer une approximation du graphe de la fonction f à l'aide de l'outil informatique. Conjecturer un résultat sur la monotonie de la fonction f et sur les limites au bord de son domaine de définition.
2. Soient x et x' deux réels strictement positifs tels que $x < x'$. Déterminer le signe de $f(x) - f(x')$. En déduire que f est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Justifier que f admet une limite finie en $+\infty$.
   On ne demande pas de déterminer la valeur de cette limite à ce stade de l'exercice.
4. Dans cette question, on cherche à justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit x_0 un réel strictement positif quelconque.
   (a) Montrer que :
   $$\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right[, \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2|x - x_0|}{x_0^2}.$$
   (b) En déduire que f est continue en x_0.
5. Montrer qu'il existe un réel A tel que, pour tout réel x strictement positif, on ait :
   $$\frac{A}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{A}{x}.$$
   Ce résultat est-il cohérent avec le graphe de f ?
   En déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.
6. Le but de cette question est de déterminer un équivalent simple de f en 0.
   (a) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = \int_0^1 \frac{\cos(t) - 1}{x+t}\,dt.$$
   En admettant l'inégalité suivante : $\forall t \in [0,1], \quad |\cos(t) - 1| \leq \frac{t^2}{2}$, établir que g est une fonction bornée.
   (b) En déduire un équivalent simple de f en 0.

Éléments de correction–Planche 3

Exercice avec préparation

On définit la fonction numérique f sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{\cos(t)}{x+t}\, dt.$$

1. (a) Pour calculer une approximation de $f(x)$, on utilise une somme de Riemann du type

$$f(x) \simeq f_N(x) := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{\cos \frac{k}{N}}{x + \frac{k}{N}}$$

Plus N est grand, plus f_N est proche de $f(x)$.

```
def f(x,N=100):
    s=0
    for k in range(1,N+1):
        s+=np.cos(k/N)/(x+k/N)
    return s/N

#On graphe sur [0.01,10[
x=np.linspace(0.1,10,100)
y=f(x)
plt.subplots()
plt.xlabel('$x$');plt.ylabel('$y$')
plt.plot(x,y,label='$y=f(x)$')
```

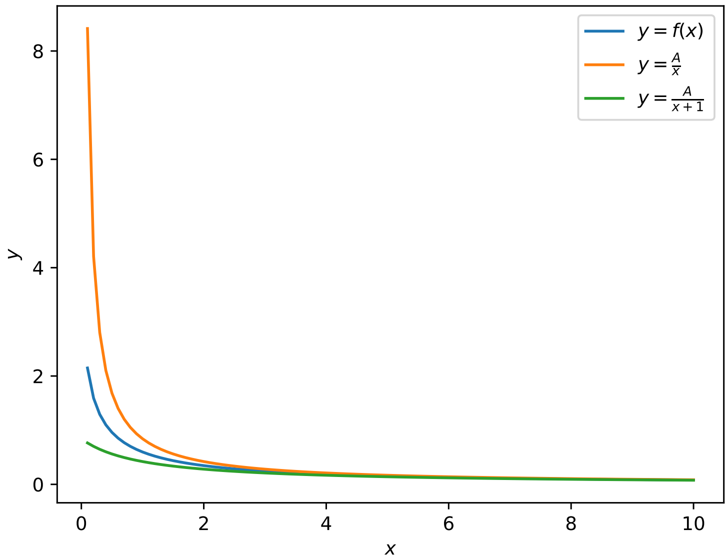

Figure 1 – Le graphe de f (N=100) ?

(b) Il apparait que f semble strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ avec

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \stackrel{?}{=} +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) \stackrel{?}{=} 0.$$

La bonne définition de $f(x)$ pour $x > 0$ est garantie par le fait que $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{x+t}$ est définie ($x > 0$ donc $x + t > 0$ si $t \geq 0$), continue sur $[0, 1]$.

Remarque : pour $x = 0$, on a affaire à l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(t)}{t}\, dt$, qui est divergente en 0 car $\cos(t)/t \geq \dfrac{\cos(1)}{t} > 0$ pour $t \in]0, 1]$.

2. Soient x et x' deux réels strictement positifs tels que $x < x'$. On a, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} f(x) - f(x') &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x'+t} \right) \cos(t)\, dt \\ &= (x' - x) \int_0^1 \left(\frac{1}{(x'+t)(x+t)} \right) \cos(t)\, dt \end{aligned}$$

L'intégrande de cette dernière intégrale est clairement positive sur l'intervalle d'intégration et, comme $x' - x < 0$, on obtient que

$$f(x) - f(x') < 0$$

La fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. L'intégrande de l'intégrale définissant f est clairement (strictement) positive et donc,

$$\forall x > 0,\ f(x) > 0$$

La fonction f étant décroissante et strictement positive, elle admet une limite $\ell \geq 0$ en $+\infty$.

4. Soit x_0 un réel strictement positif quelconque.

(a) Soit $x > 0$. On a (calcul fait précédemment avec $x' = x_0$)

$$f(x) - f(x_0) = (x_0 - x) \int_0^1 \left(\frac{1}{(x_0+t)(x+t)} \right) \cos(t)\, dt$$

et donc, par inégalité triangulaire pour les intégrales,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x_0 - x| \int_0^1 \left| \frac{1}{(x_0+t)(x+t)} \cos(t) \right| dt$$

Or, pour $t \in [0, 1]$, du fait que

$$|\cos t| \leq 1 \quad ; \quad x + t \geq x > 0 \quad ; \quad x_0 + t \geq x_0 > 0$$

on a

$$\left| \frac{1}{(x_0+t)(x+t)} \cos(t) \right| \leq \frac{1}{x x_0}$$

et donc, si $x \geq \dfrac{x_0}{2}$, pour $t \in [0, 1]$,

$$\left| \frac{1}{(x_0+t)(x+t)} \cos(t) \right| \leq \frac{2}{x_0^2}$$

En intégrant cette inégalité sur $t \in [0,1]$, on obtient

$$|f(x) - f(x_0)| \le |x_0 - x| \frac{2}{x_0^2}$$

et donc

$$\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right[, \quad 0 \le |f(x) - f(x_0)| \le \frac{2|x - x_0|}{x_0^2}.$$

(b) Lorsque x tend vers x_0, on peut supposer que $x \ge \frac{x_0}{2}$ et, par le théorème des gendarmes, comme $\lim_{x \to x_0} \frac{2|x - x_0|}{x_0^2} = 0$ alors

$$\lim_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$$

c'est-à-dire $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ et donc f est continue en x_0.

5. Pour $t \in [0,1]$, du fait que $x + 1 \ge x + t \ge x > 0$ et $\cos(t) > 0$ on a

$$\frac{\cos(t)}{x+1} \le \frac{\cos(t)}{x+t} \le \frac{\cos(t)}{x}$$

et donc, en intégrant cette inégalité sur $t \in [0,1]$, on obtient

$$\frac{1}{x+1} \int_0^1 \cos(t)\ dt \le f(x) \le \frac{1}{x} \int_0^1 \cos(t)\ dt.$$

On a donc l'inégalité demandée pour $A = \int_0^1 \cos(t)\ dt = \sin(1)$ (calcul sans grand intérêt)
Le graphe de la figure 1 montre cet encadrement.
En divisant l'inégalité précédent par $\frac{A}{x} > 0$, on obtient un encadrement de $\frac{f(x)}{\frac{A}{x}}$ dont les deux extrêmes ont pour limite 1 en $+\infty$, cela montre, via le théorème des gendarmes que

$$\lim x \to +\infty \frac{f(x)}{\frac{A}{x}} = 1.$$

Ainsi

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{A}{x}.$$

6. (a) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{\cos(t) - 1}{x + t}\ dt.$$

On admet l'inégalité suivante : $\forall t \in [0;1], |\cos(t) - 1| \le \frac{t^2}{2}$.
On a, pour $x > 0$, pour $t \in [0,1]$,

$$\left| \frac{\cos(t) - 1}{x + t} \right| \le \frac{1}{2} \frac{t^2}{t + x} \le \frac{1}{2} t$$

En intégrant cette inégalité sur $t \in [0,1]$, par l'inégalité triangulaire sur les intégrales, on obtient :

$$|g(x)| \le \int_0^1 \left| \frac{\cos(t) - 1}{x + t} \right|\ dt \le \frac{1}{2} \int_0^1 t\ dt = \frac{1}{4}$$

La fonction g est donc bornée sur $]0, +\infty[$.

(b) On a, pour $x > 0$,

$$f(x) = g(x) + \int_0^1 \frac{1}{x+t}\, dt = g(x) + \ln(x+1) - \ln x.$$

Or

$$\lim_{x\to 0} \ln(1+x) = 0 \quad ; \quad |g(x)| \leq \frac{1}{4} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} -\ln x = +\infty$$

donc $g(x) + \ln(x+1) \underset{x\to 0}{=} o(-\ln x)$ et donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x).$$

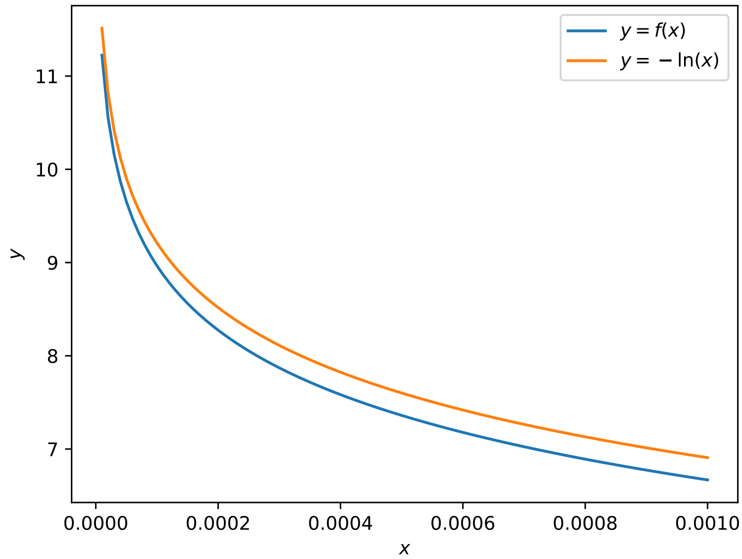

Figure 2 – Le graphe de f (N=1000000) et celui de $-\ln$ au voisinage de 0.

Remarque : il faut monter en N pour que l'approximation par sommes de Riemann soit correcte.

Agro-Veto – Planche 4

Question de cours

Énoncer le théorème du rang pour une application linéaire $f : E \to F$.

Exercice avec préparation

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul.
Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires à densité, indépendantes et de même fonction de répartition F, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on ordonne les valeurs $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $Y_k(\omega)$ la k-ème plus petite valeur. On a donc $Y_1(\omega) \leqslant Y_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant Y_n(\omega)$.
En particulier, on a $Y_1 = \min(X_1, \ldots, X_n), Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que les variables $X_1, \ldots, X_n$ suivent la même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(Y_1 > x)$ pour tout réel x positif et en déduire la fonction de répartition de Y_1. Reconnaitre une loi usuelle dont on donnera l'espérance et la variance.
   (b) Montrer que si U est une variable qui suit la loi uniforme sur $]0, 1]$ alors $\dfrac{-1}{\lambda}\ln(U)$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   (c) Écrire un programme qui, pour un $n \in \mathbb{N}$ et un $i \in [\![1, n]\!]$ donnés, permet de simuler la variable aléatoire Y_i lorsque les variables $X_1, \ldots, X_n$ suivent indépendamment la même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   On pourra pour cela utiliser l'instruction `B=sorted(A)` qui fournit un tableau `B` contenant les valeurs du tableau `A` rangées dans l'ordre croissant.

   On retourne maintenant au cas général.
2. Exprimer la fonction de répartition de Y_n à l'aide de F.
3. Les variables Y_1 et Y_n sont-elles indépendantes ?
4. On souhaite maintenant obtenir la fonction de répartition de Y_i, pour n'importe quel i dans $[\![1, n]\!]$. On fixe donc i dans $[\![1, n]\!]$ et x dans $\mathbb{R}$ et on cherche à calculer $\mathbb{P}(Y_i \leqslant x)$. C'est la probabilité qu'au moins i variables parmi $X_1, \ldots, X_n$ soient inférieures ou égales à x.
   (a) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note Z_k la variable telle que $Z_k(\omega) = 1$ si $X_k(\omega) \leqslant x$ et $Z_k(\omega) = 0$ sinon.
   Reconnaitre la loi de Z_k (on exprimera le(s) paramètre(s) à l'aide de $F(x)$).
   (b) On note $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Z_k$. Que représente S ? Reconnaitre sa loi.
   (c) Montrer que $\mathbb{P}(Y_i \leqslant x) = \mathbb{P}(S \geqslant i)$ et en déduire l'expression de $\mathbb{P}(Y_i \leqslant x)$ sous la forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à simplifier.

Éléments de correction–Planche 4

Exercice avec préparation

1. Dans cette question uniquement, on suppose que les variables $X_1, \ldots, X_n$ suivent la même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

   (a) La fonction de répartition commune aux variables X_k est F définie par

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda . x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

   et donc, pour tout réel $x > 0$, pour tout k,

   $$\mathbb{P}(X_k > x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda . x}.$$

   Maintenant, pour $x \geq 0$,

   $$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(Y_1 > x\right) = \mathbb{P}(\min\left(X_1, \ldots, X_n\right) > x) &= \mathbb{P}([X_1 > x] \cap \ldots \cap [X_n > x]) \\ &= \mathbb{P}(X_1 > x). \ldots .\mathbb{P}(X_n > x) \quad \text{(indépendance)} \\ &= \left(e^{-\lambda x}\right)^n \\ &= e^{-\lambda n x} \end{aligned}$$

   En notant F_{Y_1} la fonction de répartition de Y_1, on vient donc de montrer que :

   $$\forall x \geq 0, \quad F_{Y_1}(x) = 1 - \mathbb{P}(Y_1 > x) = 1 - e^{-\lambda n x}.$$

   Comme pour $\forall x \leq 0, \quad F_{Y_1}(x) = 0$, on reconnait que Y_1 est une variable exponentielle de paramètre $n\lambda$. On a donc

   $$\mathbb{E}(Y_1) = \frac{1}{n\lambda},\ \mathbb{V}(Y_1) = \frac{1}{(n\lambda)^2}.$$

   (b) Soit $\lambda > 0$ et U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0,1]$ alors $T = \dfrac{-1}{\lambda}\ln(U)$ est une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty[$. Pour $t \in [0, +\infty[$, on a (par manipulation d'inégalités élémentaires et du fait que $e^{-\lambda t} \in]0,1]$) :

   $$\mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}\left(\frac{-1}{\lambda}\ln(U) \leq t\right) = \mathbb{P}\left(U \geq e^{-\lambda . t}\right) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

   La variable T suit donc la loi exponentielle de paramètre λ.

   (c) Pour simuler Y_i, on tire au sort, indépendamment, n valeurs suivant la loi exponentielle de paramètre λ (et pour cela on se sert de la question précédente qui permet de produire une telle valeur à partir du `np.random.rand()` de base), on trie ensuite ces n valeurs et on en extrait le i-ème terme (qui porte le numéro $i-1$ dans la liste triée).

```python
def Exp(lambada=1):
    """
    simulation d'une v.a. exponentielle de param. lambda
    """
    return -np.log(np.random.rand())/lambada
```

```python
def Y(i,n=10,lambada=1):
    """ i indice de Y_i, n, lambada: les éléments de contexte
    retourne une valeur simulée de Y_i
    """
    X = []
    for _ in range(n):
        X.append(Exp(lambada=lambada))
    Y = sorted(X)
    return Y[i-1]
```

2. Reprenons le raisonnement exhibé en 1.(a). Notons F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) = \mathbb{P}\left(Y_n \leq x\right) = \mathbb{P}(\max\left(X_1, \ldots, X_n\right) \leq x) &= \mathbb{P}([X_1 \leq x] \cap \ldots \cap [X_n \leq x]) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x). \ldots . \mathbb{P}(X_n \leq x) \quad \text{(indépendance)} \\ &= \left(F(x)\right)^n . \end{aligned}$$

On peut noter que dans le cas exponentiel qui nous interésse, cela se traduit en

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Y_n}(x) = \begin{cases} (1-e^{-\lambda x})^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Les variables Y_1 et Y_n ne sont pas indépendantes en toute généralité.
En effet, si $a < b$ sont deux nombres réels, on a (même type de raisonnement basé sur la def du min et du max ainsi que sur l'indépendance mutuelle des X_k) :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}([a < Y_1] \cap [Y_n \leq b]) = \mathbb{P}([a < X_1 \leq b] \cap \cdots \cap [a < X_n \leq b]) = (F(b) - F(a))^n \\ &\mathbb{P}(a < Y_1) = (1 - F(a))^n \\ &\mathbb{P}(Y_n \leq b) = F(b)^n. \end{aligned}$$

Si Y_1 et Y_n étaient indépendantes on aurait alors,

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \Longrightarrow (F(b) - F(a))^n = F(b)^n (1 - F(a))^n.$$

S'il existe α tel que $p = F(\alpha) \in]0,1[$ (ce qui existe si X est non constante), on a alors :

$$\forall x \geq \alpha,\ (F(x) - p)^n = (F(x))^n (1-p)^n.$$

Comme F est continue à droite, en prenant la limite lorsque $x \to \alpha^+$ dans l'identité précédente, on obtient que

$$0 = p^n (1-p)^n \neq 0.$$

Remarque : la preuve précédente (utilisant la continuité à droite en un point très particulier) est probablement trop générale et trop astucieuse par rapport à ce qui est demandé. Pour le cas exponentiel, on doit pouvoir faire un calcul explicite en prenant $b = a+1$ et obtenir une identité impossible à tenir pour tout a. A faire donc...

4. (a) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note Z_k la variable telle que $Z_k(\omega) = 1$ si $X_k(\omega) \leqslant x$ et $Z_k(\omega) = 0$ sinon.
Donc Z_k est une variable de Bernoulli de paramètre de succès $p = \mathbb{P}(X_k \leq x) = F(x)$.

(b) On note $S = \sum_{k=1}^{n} Z_k$. La variable aléatoire S compte le nombre de valeurs des X_k qui sont inférieure ou égale à x.

C'est la somme de n variables de Bernoulli de paramètre $p = F(x)$ *mutuellement indépendantes* (car les X_k le sont). Donc S suit la loi binomiale de paramètres n et $F(x)$.

(c) On a l'égalité d'événements

$$[Y_i \leqslant x] = [S \geqslant i].$$

En effet, $[Y_i \leq x$ est réalisé si et seulement si les i premières valeurs des X_k sont toutes inférieures à x et donc c'est le fait qu'au moins i valeurs dans les X_k sont inférieures à x. Ainsi $[Y_i \leq x$ est réalisé si et seulement si $[S \geq i]$.

On a donc $\mathbb{P}\left(Y_i \leqslant x\right) = \mathbb{P}(S \geqslant i)$ et

$$\mathbb{P}\left(Y_i \leqslant x\right) = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} F(x)^k (1 - F(x))^{n-k}$$