Exercice avec préparation

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ et une urne contenant n boules nuérotées de 1 à n . On effectue 3 tirages *sans remise* et on note M , resp. m , le plus grand, resp. petit, numéro obtenu. On note $Z = M - m$.

1. Dans quel ensemble M prend-elle naturellement ses valeurs ? Et m , Z ?
2. Calculer la loi du couple (m, M) .
3. Calculer la loi de Z .
4. Espérance de Z ?

On rappelle que pour $p \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^p k = \frac{p(p+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^p k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

Exercice avec préparation

On définit les fonctions (dans l'ordre, $\cosh$, le *cosinus hyperbolique* et $\sinh$, le *sinus hyperbolique*) par les formules

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cosh(x) = \frac{e^{+x} + e^{-x}}{2}, \sinh(x) = \frac{e^{+x} - e^{-x}}{2}$$

et pour $x \in \mathbb{R}$, on pose la matrice

$$A(x) = \begin{pmatrix} \cosh(x) & \sinh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) \end{pmatrix}$$

1. (a) Simplifier, pour $x \in \mathbb{R}$, $\cosh^2(x) - \sinh^2(x)$.
 (b) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $A(x)$ est inversible et déterminer $y \in \mathbb{R}$, en fonction de x tel que

$$A(x)^{-1} = A(y)$$

2. (a) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, donner une relation entre $\cosh(a+b)$, $\cosh(a)\cosh(b)$ et $\sinh(a)\sinh(b)$.
 Faire de même avec $\sinh(a+b)$, $\sinh(a)\cosh(b)$ et $\cosh(a)\sinh(b)$.
 (b) Pour $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ (puis $n \in \mathbb{Z}$), donner $y \in \mathbb{R}$ en fonction de n et x pour que

$$A(x)^n = A(y)$$

3. $A(x)$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Donner ses valeurs propres.

Correction exercice 1

1. Notons $T = \{T_1, T_2, T_3\}$ l'ensemble à trois éléments tiré au sort, avec comme convention

$$1 \leq T_1 < T_2 < T_3 \leq n.$$

On a en fait, avec cette convention d'ordonnement, $T = \{m, c, M\}$ où c désigne l'élément central.

La v.a. M est à valeurs dans $\llbracket 3, n \rrbracket$; m dans $\llbracket 1, n-2 \rrbracket$ et Z dans $\llbracket 2, n-1 \rrbracket$.

La v.a. T suit une loi uniforme sur l'ensemble des parties à trois éléments parmi les éléments $\llbracket 1, n \rrbracket$. Si $1 \leq i < j < k \leq n$, on a

$$\mathbb{P}(T = \{i, j, k\}) = \frac{1}{\binom{n}{3}}.$$

2. Le couple (m, M) est à valeurs dans

$$\{(i, k) \in \mathbb{N}^2, 1 \leq i \leq n-2, i+2 \leq k \leq n\}.$$

Pour un couple (i, k) dans cet ensemble, on a, en conditionnant sur les valeurs de l'élément central c ,

$$\mathbb{P}([m = i] \cap [M = k]) = \sum_{j=i+1}^{k-1} \mathbb{P}(T = \{i, j, k\}) = \frac{(k-i-1)}{\binom{n}{3}}.$$

3. La v.a. Z est à valeurs dans $\llbracket 2, n-1 \rrbracket$. Soit ℓ dans cet ensemble, on a, en conditionnant sur les valeurs possibles de m que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = \ell) &= \sum_{i=1}^{n-2} \mathbb{P}([Z = \ell] \cap [m = i]) \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} \mathbb{P}([M = \ell + i] \cap [m = i]) \\ \text{(valeurs de } M) &= \sum_{i=1}^{n-\ell} \mathbb{P}([M = \ell + i] \cap [m = i]) \\ &= \sum_{i=1}^{n-\ell} \frac{(\ell-1)}{\binom{n}{3}} = \frac{(n-\ell) \cdot (\ell-1)}{\binom{n}{3}} \end{aligned}$$

Remarquons que cela donne l'identité

$$\sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{(n-\ell)(\ell-1)}{\binom{n}{3}} = \sum_{\ell=2}^{n-1} \frac{(n-\ell)(\ell-1)}{\binom{n}{3}} = 1$$

et donc

$$\sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{(n-\ell)\ell}{\binom{n}{3}} = 1 + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{(n-\ell)}{\binom{n}{3}} = 1 + \frac{1}{\binom{n}{3}} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{3(n+1) + (n-1)(n-2)}{(n-1)(n-2)} = \frac{n+1}{n-2}$$

4. On a

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{\ell=2}^{n-1} \frac{(n-\ell)(\ell-1)\ell}{\binom{n}{3}} = \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{(n-\ell)(\ell-1)\ell}{\binom{n}{3}}$$

Par changement d'indice $\ell' = n - \ell$, on a aussi

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\ell(n-\ell-1)(n-\ell)}{\binom{n}{3}}$$

En additionnant ces deux formules, on obtient

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{n-2}{2} \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\ell(n-\ell)}{\binom{n}{3}} = \frac{n+1}{2}.$$

Une remarque finale : si on ne veut calculer que l'espérance de Z , on peut procéder différemment, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(M) - \mathbb{E}(m)$$

La loi de m , qui est à valeurs dans $\llbracket 1, n-2 \rrbracket$, se calcule assez aisément par dénombrement. Si $i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$, on a

$$\mathbb{P}(m = i) = \frac{\text{nbre de paires dans } \llbracket i+1, n \rrbracket}{\binom{n}{3}} = \frac{\binom{n-i}{2}}{\binom{n}{3}} = 3 \frac{(n-i)(n-i-1)}{n(n-1)(n-2)}$$

De même, la loi de M , qui est à valeurs dans $\llbracket 3, n \rrbracket$, se calcule assez aisément par dénombrement. Si $k \in \llbracket 3, n \rrbracket$, on a

$$\mathbb{P}(M = k) = \frac{\text{nbre de paires dans } \llbracket 1, k-1 \rrbracket}{\binom{n}{3}} = \frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{n}{3}} = 3 \frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= 3 \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \left(\sum_{i=1}^{n-2} i(n-i)(n-i-1) - \sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2) \right) \\ &= \dots \end{aligned}$$

L'exercice permet de calculer la loi complète de Z .

Correction exercice 2

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{1}{4} (e^{2x} + e^{-2x} + 2e^{x-x} - (e^{2x} + e^{-2x} - 2e^{x-x})) = 1$$

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, le déterminant de $A(x)$ est donc $1 \neq 0$, $A(x)$ est donc inversible et (formule d'inversion d'une matrice 2×2 grâce au déterminant)

$$A(x)^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \cosh(x) & -\sinh(x) \\ -\sinh(x) & \cosh(x) \end{pmatrix} = A(-x)$$

2. (a) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\cosh(a) \cosh(b) &= \frac{1}{4} (e^{a+b} + e^{-a-b} + e^{a-b} + e^{-a+b}) \\ &= \frac{1}{2} (\cosh(a+b) + \cosh(a-b)) \\ \sinh(a) \sinh(b) &= \frac{1}{4} (e^{a+b} + e^{-a-b} - e^{a-b} - e^{-a+b}) \\ &= \frac{1}{2} (\cosh(a+b) - \cosh(a-b))\end{aligned}$$

En additionnant, on obtient alors

$$\cosh(a+b) = \cosh(a) \cosh(b) + \sinh(a) \sinh(b)$$

De même,

$$\begin{aligned}\cosh(a) \sinh(b) &= \frac{1}{4} (e^{a+b} - e^{-a-b} - e^{a-b} + e^{-a+b}) \\ &= \frac{1}{2} (\sinh(a+b) + \sinh(b-a)) \\ \sinh(a) \cosh(b) &= \frac{1}{4} (e^{a+b} - e^{-a-b} + e^{a-b} - e^{-a+b}) \\ &= \frac{1}{2} (\sinh(a+b) + \sinh(b-a))\end{aligned}$$

En additionnant, on obtient alors

$$\sinh(a+b) = \cosh(a) \sinh(b) + \sinh(a) \cosh(b)$$

(b) Les règles précédentes donnent pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$A(a+b) = A(a)A(b)$$

Par récurrence (à rédiger), pour $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A(x)^n = A(nx)$$

Formule qui est aussi valable pour $n \in \mathbb{Z}$.

3. $A(x)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car elle est symétrique réelle. Un réel λ est v.p. de $A(x)$ si et seulement si la matrice $A(x) - \lambda I_2$ est non inversible, c'est-à-dire a un déterminant nul, c'est-à-dire ssi

$$\lambda^2 - (e^x + e^{-x})\lambda + 1 = 0.$$

Après résolution, e^x et e^{-x} sont les v.p de $A(x)$ (on a une unique v.p 1 pour $x = 0$, $A(0) = I_2$).

Exercice avec préparation

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}. \end{cases}$$

1. Montrer, pour tout entier naturel n , l'inégalité

$$u_n \geq \sqrt{n}.$$

2. Montrer, pour tout réel positif x , l'inégalité

$$\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1 + x).$$

3. En déduire, pour tout entier naturel n , l'inégalité

$$u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}.$$

4. Montrer que la suite $\left(\frac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0, puis que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0.

Exercice avec préparation

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels x et y pour que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$$

soit inversible.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On suppose que les variables X et Y sont indépendantes, de même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}.$$

Déterminer la probabilité de l'événement $D = \{\omega \in \Omega / M(\omega) \text{ est inversible}\}$.

Correction exercice 1

1. On montre par récurrence que la suite u est bien définie et à termes positifs car pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{n+x} \geq 0$.

Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 0$$

alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{n+u_{n-1}} \geq \sqrt{n}$, par croissance de $\sqrt{\cdot}$. (on a de plus $u_0 \geq 0 = \sqrt{0}$)

2. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\frac{1}{2}(1+x) - \sqrt{x} = \frac{1}{2}(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$$

avec égalité si et seulement si $x = 1$.

3. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq \frac{1}{2}(n+u_{n-1}).$$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}.$$

— Cette inégalité est vraie lorsque $n = 0$

— Si elle est vraie à un certain rang $n \geq 0$, alors

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(n+1+u_n) \leq \frac{1}{2}(n+1+n+\frac{u_0}{2^n}) = n + \frac{1}{2} + \frac{u_0}{2^{n+1}} \leq n+1 + \frac{u_0}{2^{n+1}}$$

et donc elle est vraie au rang $n+1$.

4. On a donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq \frac{u_{n-1}}{n^2} \leq \frac{n-1}{n^2} + \frac{u_0}{n^2 2^{n-1}}$$

et il est clair que le membre de droite de cette inégalité tend vers 0 en $+\infty$. Par le théorème des gendarmes, la suite $\left(\frac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Maintenant, pour $n \geq 1$,

$$\frac{u_n}{n} = \frac{\sqrt{n+u_{n-1}}}{n} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n^2}}$$

et il est clair par ce qui vient d'être dit que ceci tend vers 0 par les règles algébriques usuelles régissant les limites.

Pour aller plus loin, on voit que le même argument donne que $\frac{u_n}{n^\alpha}$ tend vers 0 pour tout $\alpha > \frac{1}{2}$.

La question est donc le comportement de $\frac{u_n}{\sqrt{n}}$. On a, pour $n \geq 1$,

$$\frac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}$$

et ceci, par les règles algébriques usuelle sur les limites, tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

On a donc

$$u_n \sim \sqrt{n}$$

Pour aller plus loin encore, on peut se poser la question du comportement de $u_n - \sqrt{n}$. On a

$$u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n+u_{n-1}} - \sqrt{n} = \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n+u_{n-1}} + \sqrt{n}}$$

ce qui est équivalent en $+\infty$ à

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

Correction exercice 2

1. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$$

est inversible si et seulement si son déterminant est non nul c'est-à-dire ssi $x^2 - y^2 \neq 0$.

2. L'événement $D = \{\omega \in \Omega / M(\omega) \text{ est inversible}\}$ se réécrit donc

$$D = [X^2 - Y^2 = 0].$$

Comme les variables X et Y sont de même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, elles sont à valeurs positives et on a donc

$$D = [X = Y].$$

On peut maintenant calculer $\mathbb{P}(D)$ en décomposant l'événement sur D sur le SCE $([X = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = Y] \cap [X = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = k] \cap [X = k]) \\ (\text{indépendance}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = k) \\ (\text{lois}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2(n-1)} \\ &= \frac{p^2}{1 - q^2} \end{aligned}$$