Agro-Veto – Planche 6

Question de cours

Espérance et variance d'une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $1/3$.

Exercice avec préparation

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.
   (a) Montrer que f est une densité. Par la suite, on note X une variable aléatoire de densité f.
   (b) Donner sa fonction de répartition F.
   (c) Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ et que : $\forall u \in]0,1[\,,\ F^{-1}(u) = \ln\left(\dfrac{u}{1-u}\right)$.
2. Soit U suivant une loi uniforme sur $]0,1[$. Montrer que $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$ a la même loi que X.
3. Écrire une fonction Python permettant de simuler X.
4. À l'aide de cette fonction faire une conjecture sur $\mathbb{E}(X)$ et approcher $\mathbb{V}(X)$.
5. (a) Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$ est convergente.
   (b) Montrer que f est paire et justifier que $\mathbb{E}(X)$ existe puis la déterminer.
6. On cherche ici à déterminer précisément la variance de X.
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}dx$ est convergente.
   À l'aide d'une intégration par partie dans l'intégrale précédente, justifier que la variance de X existe et vérifie l'égalité :
   $$\mathbb{V}(X) = 4\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}dx$$

Exercice avec préparation

6. (b) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} dx \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{+\infty} xe^{-(k+1)x} dx + I_n \quad \text{où} \quad I_n \;=\; (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-(n+2)x}}{1+e^{-x}} dx$$

(c) Montrer que l'intégrale I_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et en déduire l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} dx \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$$

(d) On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. En déduire que la variance de X est égale à $\dfrac{\pi^2}{3}$.

Exercice sans préparation

1. Écrire une fonction qui trie une liste de nombres dans l'ordre croissant.
2. Écrire une fonction qui prend en entrée une liste de nombres et renvoie la valeur maximale, minimale et la médiane.

Éléments de correction–Planche 6

Exercice avec préparation

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.
   (a) La fonction f est clairement continue sur tout $\mathbb{R}$ (quotient de deux fonctions polynomiales en e^{-x} dont le dénominateur ne s'annule pas).
   — f est positive sur tout $\mathbb{R}$;
   — Il reste à évaluer l'intégrale généralisée (légitime par continuité de l'intégrande sur tout $\mathbb{R}$)
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\,dx.$$
   On reconnait une dérivée de fonction composée :
   $$\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$$
   et donc, sous réserve d'existence des limites apparaissant dans les »crochets généralisés« , réserve levée dans la foulée :
   $$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\,dx &= \left[\frac{1}{1+e^{-x}}\right]_0^{+\infty} = 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\\ \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\,dx &= \left[\frac{1}{1+e^{-x}}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}\end{aligned}$$
   et donc
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\,dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$
   — En conclusion, f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

   On note X une variable aléatoire de densité f. On dit que X suit la loi logistique.

   (b) La primitivation faite dans la question précédente monter que pour $x \in \mathbb{R}$,
   $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\,dt = \left[\frac{1}{1+e^{-t}}\right]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$
   (c) La fonction F est clairement $\mathcal{C}^1$ sur tout $\mathbb{R}$, de dérivée strictement positive ($F'=f$) et donc F est *strictement* croissante sur $\mathbb{R}$.
   Comme $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ (ce que l'on peut vérifier sur la formule mais qui est une propriété générale de toute fonction de répartition), il vient par le théorème de la bijection continue que F définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.
   Soit $u \in]0,1[$. Résolvons explicitement l'équation $F(x) = u$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ (dont on sait *à l'avance* qu'elle admet une unique solution) pour trouver une formule pour $x = F^{-1}(u)$.
   On a les équivalences
   $$u = \frac{1}{1+e^{-x}} \iff 1+e^{-x} = \frac{1}{u} \iff e^{-x} = \frac{1-u}{u} \iff e^{x} = \frac{u}{1-u} \iff x = \ln\left(\frac{u}{1-u}\right)$$
   et donc
   $$\forall u \in]0,1[\,,\ F^{-1}(u) = \ln\left(\frac{u}{1-u}\right).$$

2. Reprenons la chaîne d'équivalences de la résolution d'équation précédente pour résoudre l'inéquation $F(x) \leq u$ ($x \in \mathbb{R}$, $u \in]0,1[$) en remarquant que F est strictement croissante donc F^{-1} aussi
$$F(x) \geq u \iff x \geq F^{-1}(u) = \ln\left(\frac{u}{1-u}\right).$$
Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $]0,1[$ et posons $X' = \ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$.
La v.a. X' est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, (la première égalité est par définition, la deuxième est due à l'équivalence ci-dessus)
$$\mathbb{P}(X' \leq x) = \mathbb{P}\left(x \geq \ln\left(\frac{U}{1-U}\right)\right) = \mathbb{P}\left(U \leq \frac{1}{1+e^{-x}}\right) = \frac{1}{1+e^{-x}} = F(x).$$
Remarquons que l'on a utilisé le fait que pour $u = \dfrac{1}{1+e^{-x}} = F(x) \in]0,1[$, $\mathbb{P}(U \leq u) = u$.
La v.a. X' a donc la même fonction de répartition que X, elle a donc la même loi que X.

3.
```python
import numpy as np
# Simulation de X
def U():
    return np.random.rand()
def X():
    u = U()
    return np.log(u/(1-u))
# Approximation de E(X) via la LGN
def EX(NS = 10_000) :
    S = 0.0
    for _ in range(NS):
        S+= X()
    return S/NS
# Espérance et variance sur un échantillon commun via LGN
def EXVX(NS = 10_000) :
    Ech = []
    for _ in range(NS):
        Ech.append(X())
    Ech  = np.array(Ech)
    return Ech.mean(), (Ech.std())**2
```

4. En expérimentant :
   - L'espérance $\mathbb{E}(X)$ a l'air proche de 0 : sur `NS = 10 000` simulation, on tombe sur 0 à 10^{-2} près la plupart du temps.
   - La variance $\mathbb{V}(X)$ tourne autour de 3.3.

5. (a) — L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$ est légitime à considérer car son intégrande $x \mapsto xf(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Par ailleurs, cette intégrande est positif sur l'intervalle d'intégration.
   — Par simple majoration : $0 \leq \dfrac{1}{1+e^{-x}} \leq 1$ donc
$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq x.f(x) \leq x.e^{-x}.$$

Or $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\, dx$ est convergente et vaut 1 (cours sur les v.a. exponentielles) et donc par le théorème de comparaison pour les intégrales à intégrande positive, l'intégrale $\int_0^{+\infty} xf(x)\, dx$ est convergente.

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, (en factorisant/simplifiant e^x aux numérateur et dénominateur),

$$f(-x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{e^{2x}} \frac{1}{(e^{-x}+1)^2} = \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2} = f(x)$$

La fonction f est donc paire (son domaine de définition est $\mathbb{R}$ qui n'a pas de problème visible de symétrie).

(c) L'existence de $\mathbb{E}(X)$ est la question de la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)\, dx$.

Cette intégrale généralisée (légitime), d'intégrande *paire* est convergente si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} xf(x)\, dx$ est convergente.

Maintenant, pour la valeur de $\mathbb{E}(X)$, il s'agit de la valeur de l'intégrale généralisée absolument convergente $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\, dx$. Comme son intégrande est impaire, et l'intégrale généralisée convergente $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ étant convergente, cette intégrale converge et vaut 0 :

$$\mathbb{E}(X) = 0.$$

6. On cherche ici à déterminer précisément la variance de X.

(a) L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\, dx$ est légitime à étudier car on intégrande, $x \mapsto \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Cette fonction est par ailleurs positive et, comme dans la question précédente :

$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} \leq xe^{-x}.$$

On a déjà expliqué pourquoi $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\, dx$ est convergente et le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives garantit la convergence de l'intégrale qui nous intéresse.

La variance de X existe si l'intégrale généralisée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$$

converge et, en ce cas, vaut la valeur de cette intégrale (car $\mathbb{E}(X) = 0$).

Par parité de f et donc de $x \mapsto x^2 f(x)$, cette convergence équivaut à celle de

$$\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x^2 F'(x)\, dx$$

et, au niveau des valeurs, en cas de convergence, on a

$$\mathbb{V}(X) = 2\int_0^{+\infty} x^2 F'(x)\, dx.$$

Appliquons une intégration par parties pour montrer la convergence et évaluer cette dernière intégrale. On pose $u(x) = F(x) - 1$, $v(x) = x^2$; u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ avec

$$\forall x \geq 0, \quad u'(x) = F'(x) \quad \text{et} \quad v'(x) = 2x$$

et

$$\forall x \geq 0, \quad u(x) = F(x) - 1 = \frac{1}{1+e^{-x}} - 1 = -\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

On a donc, pourvu que crochet et intégrale du membre de droite soit convergents ;

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^2 F'(x)\, dx &= \left[x^2(F(x)-1)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2x(F(x)-1).\, dx \\ &= 2\int_0^{+\infty} x\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.\, dx \end{aligned}$$

On a bien $\left[x^2(F(x)-1)\right]_0^{+\infty} = 0$ (c'est pour cela que l'on a retranché la constante 1 de F) par croissances comparées entre x^2 et e^{-x} en $+\infty$ et la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.\, dx$ vue à la question précédente.

En résumé, l'intégration par parties est maintenant justifiée, la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$, ainsi que l'existence de la variance $\mathbb{V}(X)$ acquises et on a :

$$\mathbb{V}(X) = 4\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} dx.$$

(b) D'après l'identité des séries géométriques (ici avec raison $q = -e^{-x}$) on a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-kx} + \frac{(-e^{-x})^{n+1}}{1+e^{-x}}.$$

En multipliant par xe^{-x}, en intégrant et enfin, par linéarité de l'intégrale, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{+\infty} xe^{-(k+1)x} dx + I_n$$

où $I_n = (-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-(n+2)x}}{1+e^{-x}} dx$.

On peut remarquer que chacune des intégrales du membre de droite est convergente (calcul de l'espérance d'une variable exponentielle $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}$ pour celles apparaissant dans la somme et argument similaire au théorème de comparaison déjà utilisé pour la dernière). On a :

$$\int_0^{+\infty} xe^{-(k+1)x} dx = \frac{1}{(k+1)^2}$$

et

$$0 \leq |I_n| = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-(n+2)x}}{1+e^{-x}} dx \leq \int_0^{+\infty} xe^{-(n+2)x} dx = \frac{1}{(n+2)^2}.$$

(c) L'inégalité tout juste exhibée et le théorème des gendarmes montrent que $I_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. De l'identité,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} dx - (-1)^n I_n,$$

on déduit la convergence de la série incriminée et l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}.$$

(d) On admet que $Z_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On évalue dans un premier temps $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$.

La série des valeurs absolues est la série de Riemann d'indice 2 : la série considérée est donc absolument convergente ce qui justifie les manipulations suivantes.

On a en groupant termes pairs et termes impairs et en rajoutant les pairs :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \\ &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2\ell}}{(2\ell+1)^2} + \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2\ell+1}}{(2\ell+1+1)^2} \\ &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2} - \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell+2)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 2\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell+2)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{2}{4}\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{(\ell+1)^2} \\ &= Z_2 - \frac{2}{4} Z_2 = \frac{1}{2} Z_2 \end{aligned}$$

On a donc

$$\mathbb{V}(X) = 4S = 2Z_2 = \frac{\pi^2}{3}.$$

On remarque que $\mathbb{V}(X) = \frac{\pi^2}{3} \simeq \frac{10}{3} \simeq 3.3$ et l'estimation trouvée à la simulation n'est pas mal du tout.

Exercice sans préparation

1.
```
def min(L):
    ind_min =0
    for k in range(len(L)):
        if L[k]<L[ind_min]:
            ind_min=k
    return ind_min

def tri(L):
    M = []
    while L !=[]:
        M.append(L[min(L)])
        L.pop(min(L))
    return M
```

2.
```
def stat(L):
    n = len(L)
    liste_ordonnee = tri(L)
    q = n//2
    mediane =0
    if n%2==1:
        mediane = liste_ordonnee[q]
    if n%2==0:
        mediane = (liste_ordonnee[q]+liste_ordonnee[q-1])/2
    return liste_ordonnee[0], mediane, liste_ordonnee[n-1]
```