Agro-Veto – Planche 8

Question de cours

Donner la définition du produit scalaire de deux vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Exercice avec préparation

On rappelle que dans le package `numpy`*, la commande* `numpy.transpose(A)` *donne la transposée de* `A` *et la commande* `numpy.ones((n,n))` *crée la matrice de taille $n \times n$ ne comportant que des 1.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$ et on considère une matrice $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que
$M^2 = J_n + (k-1)I_n$ avec :

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Écrire un programme Python permettant de déterminer, suivant la valeur de n, les valeurs propres de la matrice M^2 , ses vecteurs propres et qui permet de vérifier les résultats obtenus. On étudiera, en particulier, le cas $n = 3$ et $k = 2$.
2. (a) Déterminer, dans le cas général, le rang de J_n.
   (b) Étudier les valeurs propres éventuelles de J_n, et donner la dimension des sous espaces propres puis justifier, de deux façons différentes, que J_n est diagonalisable.
3. (a) Justifier que M^2 est également diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de M^2, et donner la dimension de ses sous espaces propres.
4. Déterminer les valeurs propres possibles de M.

Soit un réseau social de n personnes, tel que chaque couple de personnes distinctes ont exactement un ami en commun et que chaque personne a exactement k amis, avec $k \in [\![1, n-1]\!]$. Une personne n'est pas amie avec elle-même. On numérote les personnes de 1 à n.
On désigne par $A = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice telle que $A_{i,j} = 1$ si les personnes i et j sont amies et $A_{i,j} = 0$ sinon.

5. Déterminer un exemple de réseau vérifiant les hypothèses pour $n = 3$.
6. Justifier que A est symétrique.
   On admet, que le coefficient $(A^2)_{i,j}$ avec $i < j$, donne le nombre d'amis en commun des personnes i et j et que $(A^2)_{i,i}$ donne le nombre d'amis de la personne i.
7. Donner une expression de la matrice A^2 .
8. (a) Donner le nombre de couples comportant deux personnes distinctes du réseau.
   (b) Pour une personne donnée, déterminer le nombre de couples de deux personnes distinctes dont elle est un ami en commun et en déduire la relation $k^2 - k + 1 = n$.
9. (a) En déduire les valeurs propres éventuelles de A.
   (b) On suppose $\displaystyle\sum_{\lambda_i \text{ valeur propre de } A} \dim(E_{\lambda_i}(A))\lambda_i = 0$. Montrer alors que $n = 3$.

Exercice sans préparation

1. Écrire une fonction qui prend en entrée une liste L d'entiers naturels et un entier k et qui renvoie la liste obtenue en supprimant tout les multiples de k (sauf k lui même) de la liste L. On rappelle que `a//b` et `a%b` donnent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
2. Un nombre entier naturel est dit **premier** s'il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

   Écrire une fonction prenant en entrée un entier naturel n et qui renvoie la liste des nombres premiers compris entre 1 et n.

Éléments de correction–Planche 8

Exercice avec préparation

1.
```
def vpM2(n=3,k=2):
    """
    Construit la matrice M^2 et retourne vecteurs propres
    (BON, elle est sym. réelle) et valeurs propres
    """
    I=np.eye(n)
    J=np.ones((n,n))
    M2=J+(k-1)*I
    return la.eig(M2)
```

   Pour le cas $n = 3$ et $k = 2$, on obtient en console

```
> vpM2()
(array([ 1.,  1.,  4.]), array([[-0.81649658,  0.        , -0.57735027],
[ 0.40824829, -0.70710678, -0.57735027],
[ 0.40824829,  0.70710678, -0.57735027]]))
```

2. (a) Les colonnes de J_n sont toutes égales au vecteur U de taille n ne comportant que des 1. Donc $\mathrm{Im}(J_n) = \mathrm{Vect}(U)$ et donc $\mathrm{rg}(J_n) = 1$.

   (b) Pour $n \geq 2$, par le théorème du rang $\dim\ker(J_n)) = n - 1 > 0$ et donc 0 est valeur propre de J_n et la dimension de l'espace propre associé est $n - 1$. On remarque aussi que $J_N U = nU$ et donc $n \neq 0$ est valeur propre de J_n et l'espace propre associé est de dimension au moins 1.

   Comme la somme des dimensions d'espaces propres associés à des v.p. distinctes ne peut excéder n, $n \neq 0$ est valeur propre de J_n avec dimension de l'espace propre associé $= 1$.

   - La matrice J_n est symétrique réelle et donc J_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, (en base orthonormée).
   - Si $E_\lambda = \ker(J_n - \lambda I_n)$, on a

   $$\dim E_0 + \dim E_n = n$$

     et donc J_n est diagonalisable.

3. (a) La matrice M^2 est également diagonalisable car symétrique réelle ou autre argument, si V désigne un vecteur propre de J_n associé à la v.p. λ (valant 0 ou n mais on ne se sert pas de cette information) alors

   $$M^2.V = J_n V + (k-1)I_n = (\lambda + (k-1))V$$

   et donc V est vecteur propre de M^2. Une base diagonalisant J_n diagonalise aussi M^2 et M^2 est donc diagonalisable.

   (b) Le deuxième argument précédent ainsi que la dimension des espaces propres de J_n implique que

   - $k - 1 = 0 + (k - 1)$ est valeur propre de M^2, la dimension de l'espace propre associé étant $n - 1$.

— $n+k-1$ est valeur propre de M^2, la dimension de l'espace propre associé étant 1.

4. Si λ est v.p. de M associée à un vecteur propre $V \neq 0$, on doit avoir
$$MV = \lambda V \quad \text{et} \quad M^2V = M(\lambda V) = \lambda^2 V$$
donc λ^2 est valeur propre de M^2 et donc, soit $\lambda^2 = k-1$, soit $\lambda^2 = n+k-1$, c'est-à-dire
$$\mathrm{Sp}(M) \subset \{\sqrt{k-1}, -\sqrt{k-1}, \sqrt{n+k-1}, -\sqrt{n+k-1}\}.$$
Notons que M n'admet pas en même temps $\sqrt{n+k-1}$ et $-\sqrt{n+k-1}$ comme valeurs propres. En effet, sinon, si V_+, V_- sont des vecteurs propres de M associés à chacune de ces valeurs propres, le calcul fait précédemment montre que V_+, V_- appartiennent à la droite vectorielle E_n. Les deux vecteurs V_+ et V_- sont colinéaires et non nuls, ce qui est impossible pour des vecteurs propres d'une matrice associés à des valeurs propres distincte !

5. Nommons les trois personnes A,B et C. Si chacun est ami avec les deux autres alors ce réseau rempli les conditions demandées avec $k=2$. Si $k=1$, chacun est ami avec une seule personne, ce qui couplé avec la condition que deux personnes distinctes ont un ami commun mène à une impossibilité. Si A est ami avec B alors deux cas se présentent pour C :
   — C est ami avec A et donc il n'a pas d'ami commun avec A
   — C est ami avec B et donc il n'a pas d'ami commun avec B.

6. La matrice A est symétrique car si i est ami avec j, j est ami avec i. Sa diagonale est nulle car i n'est pas ami avec lui-même.

7. Vu ce qui est admis et vu la contrainte sur le réseau, pour (i,j), $i \neq j$, quelconque
   — $(A^2)_{i,i}$ vaut k
   — $(A^2)_{i,j} = 1$ (car le nombre d'amis communs de deux personnes différentes est 1.

   On voit alors que $A^2 = J_n + (k-1).I_n$.

8. (a) Le nombre de couples comportant deux personnes distinctes du réseau est $n(n-1)$. Le nombre de paires de personnes est $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

   (b) Pour une personne donnée ℓ, le nombre de couples de deux personnes distinctes dont elle est un ami en commun est le nombre de couples (i,j) avec $i \neq j$ tels que $A_{i\ell} = 1$ et $A_{j\ell} = A_{\ell j} = 1$. Il s'agit donc de
$$S_\ell = \sum_{i \neq j} A_{i\ell}.A_{\ell j}$$
On a $\sum_i A_{i\ell} = k$ (nombre d'amis de la personne ℓ) et
$$\forall i,\ A_{i\ell}.A_{\ell i} = A_{i\ell}$$
car $A_{i\ell} = 0$ ou 1. Donc
$$S_\ell = \sum_{i,j} A_{i\ell}.A_{\ell j} - \sum_i A_{i\ell}.A_{\ell i} = \left(\sum_i A_{i\ell}\right)^2 - \sum_i A_{i\ell} = k^2 - k.$$
Maintenant $\sum_\ell S_\ell = n(n-1)$ car on peut partitionner les couples de personnes distinctes à l'aide de leur seul ami commun et donc
$$n(k^2-k) = n(n-1)$$
c'est-à-dire :
$$k^2 - k + 1 = n.$$

9. (a) D'après 4, les valeurs propres éventuelles de A sont :
   - $\pm\sqrt{n+k-1} = \pm k$ grâce à la question précédente (avec impossibilité d'avoir ces deux choix en même temps et dimension de l'espace propre associé égale à 1)
   - $\pm\sqrt{k-1}$.

   Comme A est diagonalisable, (car symétrique réelle par construction du réseau), la somme des dimensions des espaces propres de A associés à $\pm\sqrt{k-1}$ est $n-1$.

   (b) On suppose $\displaystyle\sum_{\lambda_i \text{ valeur propre de } A} \dim(E_{\lambda_i}(A))\lambda_i = 0$. Montrer alors que $n = 3$.

   On a alors, en notant $p = \dim\ker(A - \sqrt{k-1}I_n) \in \mathbb{N}$,

$$0 = \pm k + p\sqrt{k-1} + (n-1-p)(-\sqrt{k-1})$$

   et en utilisant aussi $n-1 = k^2 - k$:

$$\pm k + (2p + k - k^2)\sqrt{k-1} = 0.$$

   Il faut jouer sur le fait que k et p sont des nombres entiers naturels pour conclure et donc faire de l'arithmétique.

   Si cette égalité est vraie alors

$$k^2 = (2p + k - k^2)^2(k-1)$$

   On a donc $k-1 \in \mathbb{N}^*$ et un diviseur premier de $k-1$ est diviseur de k^2 et donc de k et donc de $k-(k-1) = 1$.

   Ainsi $k-1$ n'admet pas de diviseur premier et $k-1 = 1$. D'où $k = 2$ et, par 8.b, $n = 3$.

   Cette analyse se conclut par un appel à l'exemple exhibé en 5 qui montre que le cas $k = 2$ et $n = 3$ est finalement le seul possible.

On peut peut-être dire un mot sur les énoncés admis dans cet exercice.

- Concernant le résultat admis juste avant la question 7, on a

$$(A^2)_{ij} = \sum_k A_{ik}A_{kj}$$

  et donc on somme les indicatrices du fait que k est ami à la fois de i et j, si $i \neq j$, on compte donc le nombre d'amis communs de i et j, si $i = j$, on compte donc le nombre d'amis de i.
- Concernant $\displaystyle\sum_{\lambda_i \text{ valeur propre de } A} \dim(E_{\lambda_i}(A))\lambda_i$, il s'agit du fait que la somme des éléments diagonaux d'une matrice diagonalisable (ici 0 pour A) vaut la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité.

  Il s'agit de l'invariance de la *trace* d'une matrice par changement de base, notion hors programme.
- Concernant les arguments d'arithmétique de la dernière question, visiblement hors-programme, on peut probablement se débrouiller autrement.

Exercice sans préparation

1.
```python
def q1(L,k):
    M = []
    for elt in L :
        if elt%k != 0 or elt == k:
            M.append(elt)
    return M
```

2.
```python
def crible(n):
    L = range(1,n)
    for k in range(2,n):
        L = q1(L,k)
    return L
```