Agro-Veto – Planche 1

Question de cours

Énoncer le théorème de Rolle.

Exercice avec préparation

Une urne contient initialement 2 boules blanches et deux boules noires. Soit $c \in \mathbb{N}$. On effectue une série de tirages en suivant le protocole suivant :

- On tire au hasard une première boule. Si elle est blanche, on arrête là. Si elle est noire, on remet la boule noire dans l'urne. Puis on rajoute encore c boules noires dans l'urne.
- On recommence ainsi jusqu'à obtenir une boule blanche (si on finit par obtenir une boule blanche), ou indéfiniment si on n'obtient jamais de boule blanche.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement : « Les n premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules noires ». Soit X la variable aléatoire égale au rang du tirage de la première boule blanche si on finit par en obtenir une et égale à 0 sinon.

1. Que dire de la loi de X si $c = 0$? Calculer $\mathbb{P}(X = 3)$ en fonction de c pour c quelconque.
2. (a) Écrire une fonction Python qui prend en argument c et un entier naturel s, qui simuler l'expérience ci-dessus, avec un nombre maximal de tirages égal à s. Elle doit renvoyer la valeur de X.
   (b) Utiliser la fonction précédente pour donner une estimation de $\mathbb{P}(X = 0)$ pour $c = 1$, $c = 2$ et $c = 5$.
3. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(E_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2 + kc}{4 + kc}.$$
4. On suppose dans cette question que $c = 1$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout entier naturel n. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.
   (b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.
   (c) En utilisant le théorème du transfert, démontrer que la variable aléatoire $X + 3$ admet une espérance, et calculer cette espérance. En déduire l'espérance de X.
   (d) Utiliser la fonction de la question 2.(a) pour vérifier ce résultat à l'aide de simulations.
5. On suppose dans cette question que $c = 2$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout entier naturel n non nul. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.
   (b) Donner la loi de X. La variable X admet-elle une espérance ?
6. Dans cette question, c est un entier naturel non nul quelconque.
   (a) Démontrer que :$\forall n \in \mathbb{N}$, $-\ln(\mathbb{P}(E_n)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{2}{2 + kc}\right)$.
   (b) Déterminer alors la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.

Exercice sans préparation

Un codon est constitué de 3 nucléotides et a pour base azotée soit A, soit T, soit G, soit C.

1. Écrire une fonction de vérification qui prend en entrée une chaîne de 3 nucléotides et qui renvoie `True` si c'est un codon stop et `False` sinon. On rappelle que les codons stop sont : TAG, TAA, TGA.
2. Écrire une fonction qui cherche un codon stop dans une séquence d'ADN et renvoie la position du premier codon stop s'il y en a un et renvoie -1 sinon.

   On prendra en compte le fait que la lecture de la séquence se fait codons par codons (c'est-à-dire tous les 3 nucléotides).

Éléments de correction–Planche 1

Exercice avec préparation

1. Si $c = 0$, la composition de l'urne ne change pas, la proportion de boules blanches est, à chaque tirage $p = \frac{1}{2}$. En ce cas, X est le rang de tirage de la première boule blanche dans une suite de tirages de Bernoulli indépendants et donc X suit une loi géométrique de paramètre p, c'est-à-dire, en posant $q = 1 - p = \frac{1}{2}$,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = q^{k-1}p.$$

   Si c est quelconque, on a

$$\mathbb{P}(X = 3) = \underbrace{\mathbb{P}(X = 3|E_2)}_{=\frac{1}{2+c}}\mathbb{P}(E_2) + \underbrace{\mathbb{P}(X = 3|\overline{E_2})\mathbb{P}(\overline{E_2})}_{=0}$$

   - On a $\mathbb{P}(X = 3|\overline{E_2}) = 0$ car si lors des 2 premiers tirages on a tiré une boule blanche cela implique que $X = 1$ ou $X = 2$.
   - $\mathbb{P}(X = 3|E_2) = \frac{2}{4 + 2c} = \frac{1}{2 + c}$ car, si à l'issue des deux premiers tirages, on a tiré que des boules noires, au tirage numéro 3, la composition de l'urne est de 2 blanches et $2+(2+2c)$ boules noires. La probabilité de tirer une boule blanche (et donc celle que X vaille 3) sachant cela est donc $\frac{2}{2 + 2c}$.
   - $\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(E_2|E_1)\mathbb{P}(E_1) = \frac{2 + c}{2 + 2 + c}.\frac{2}{2 + 2} = \frac{2 + c}{4 + c}\frac{1}{2}$ avec le même genre d'explications sur la composition de l'urne à l'issue du premier tirage (2 blanches, $2 + c$ noires) si on y a tiré une boule noire.

   En conclusion, on a

$$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{2 + c}\frac{2 + c}{4 + c}\frac{1}{2} = \frac{1}{2(4 + c)}.$$

2. (a)
```python
def Bernoulli(p):
    """ Tire une sort une Bernoulli de succès p """
    if np.random.rand()<p:
        return 1
    return 0

def X(c=0,s=100):
    """
    Simule l'expérience
    Retourne le rang d'apparition de la première boule blanche
    Effectue au max s tirages
    """
    x=1
    b=2
    n=2
```

```
    while x<=s:
        if Bernoulli(b/(b+n)):#indique qu'on vient de tirer une blanche
            return x #on arrête
        else:
            n+=c
            x+=1
    return 0 #A ce point, on est sorti de la boucle car trop de tirages
```

(b) On effectue un grand nombre `NS=10000` de tirages et on calcule la proportion de tirages vérifiant la condition. Il s'agit en fait d'une évaluation de $\mathbb{P}([X=0] \cup [X \geq s])$ avec s grand.

On obtient pour $s=100$ et différentes valeurs de c :

- `c= 1 P(X=0)= 0.0`
- `c= 2 P(X=0)= 0.001`
- `c= 5 P(X=0)= 0.033`

3. Comme dans la question 1, on évalue $\mathbb{P}(E_n)$ en déterminant une relation de récurrence sur la suite $(\mathbb{P}(E_k))$.
   - On a $\mathbb{P}(E_1) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(E_2) = \dfrac{2+c}{4+c}\dfrac{1}{2}$,
   - On a, pour $n \geq 1$,

   $$\mathbb{P}(E_{k+1}) = \mathbb{P}(E_{k+1}|E_k)\mathbb{P}(E_k) = \frac{2+kc}{2+2+kc}\mathbb{P}(E_k)$$

   car, si lors des k premiers tirages, on a tiré uniquement des boules noires, la boule est composée, avant le tirage $n+1$, de 2 boules blanches et $2+kc$ boules noires.

   On vérifie aisément par récurrence qu'alors

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(E_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2+kc}{4+kc}.$$

4. On suppose dans cette question que $c=1$.

   (a) On a alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$\mathbb{P}(E_n) = \frac{2+(n-1)}{4+(n-1)}\frac{2+(n-2)}{4+(n-2)}\cdots\frac{3}{5}\frac{2}{4} = \frac{(n+1)!}{(n+3)!}.3.2 = \frac{6}{(n+3)(n+2)}.$$

   On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X=0) \subset E_n$ et donc

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \mathbb{P}(X=0) \leq \mathbb{P}(E_n) = \frac{6}{(n+3)(n+2)}$$

   et donc, en prenant la limite lorsque $n \to +\infty$, $\mathbb{P}(X=0)=0$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

   $$[X=n] = E_{n-1} \setminus E_n$$

   et donc

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(E_{n-1}) - \mathbb{P}(E_n) &= \frac{6}{(n+2).(n+1)} - \frac{6}{(n+3).(n+2)} \\ &= \frac{6}{(n+3).(n+2).(n+1)}((n+3)-(n+1))\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X=n)=\frac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

(c) Par le théorème du transfert, la variable aléatoire $X+3$ admet une espérance si la série

$$\sum_{n\geq 1}(n+3)\mathbb{P}(X=n)$$

est absolument convergente et dans ce cas la somme de la série est la valeur de l'espérance. On a

$$\sum_{n\geq 1}(n+3).\mathbb{P}(X=n)=\sum_{n\geq 1}\frac{12}{(n+1)(n+2)}=12\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{(n+1)}-\frac{1}{(n+2)}\right)=6$$

On a donc,

$$\mathbb{E}(X+3)=6$$

et donc $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(X+3)-3=3$.

(d) On évalue l'espérance en faisant la moyenne de X pour un grand nombre de simulations. On obtient

```
Esperance de X pour c=1: E(X)= 2.99466
```

5. On suppose dans cette question que $c=2$.

(a) Pour $n\geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(E_n)=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2+2.k}{4+2k}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{k+2}=\frac{2}{n+1}$$

Le même argument qu'en 4.(a) donne $\mathbb{P}(X=0)=0$.

(b) Le même argument qu'en **??** donne que

$$[X=n]=E_{n-1}\setminus E_n$$

et donc

$$\mathbb{P}(X=n)=\mathbb{P}(E_{n-1})-\mathbb{P}(E_n)=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}=\frac{2}{n.(n+1)}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}n.\frac{2}{n.(n+1)}=2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)}$ est divergente (série harmonique), la variable X n'admet pas d'espérance.

6. Dans cette question, c est un entier naturel non nul quelconque.

(a) En passant la relation obtenue en 3 au $-\ln$, on obtient, pour $n\in\mathbb{N}$,

$$-\ln(\mathbb{P}(E_n))=\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\frac{4+k.c}{2+kc}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{2}{2+k.c}\right)$$

(b) On pose $u_n=\ln\left(1+\dfrac{2}{2+n.c}\right)$, $v_n=\dfrac{2}{c}.\dfrac{1}{n}$. On a (u_n) et (v_n) positives et $u_n \underset{n\to+\infty}{sim} v_n$, on en déduit que les séries $sum_n u_n$ et $\displaystyle\sum_n v_n$ sont de même nature (et donc divergentes car on a bien reconnu un avatar de la série harmonique en $\sum v_n$). On en conclut que

$$\lim_{n\to+\infty}-\ln(\mathbb{P}(E_n))=+\infty$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(E_n) = 0.$$

L'argument en fin de 4.(a) donne alors que $\mathbb{P}(X = 0) = 0$.

Exercice sans préparation

1. ```python
   def is_stop(codon):
       L = ['TAG','TAA','TGA']
       return codon in L
   ```

2. ```python
   def stop(adn):
       n = len(adn)
       nb_codon = n//3
       s = 0
       for k in range(nb_codon):
           if is_stop(adn[3*k:3*k+3]):
               return s
           s +=1
       return -1
   ```