Agro-Veto – Planche 1

Question de cours

Qu'appelle-t-on racine d'un polynôme ? Qu'appelle-t-on une racine simple ? multiple ?

Exercice avec préparation

On considère E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admettant le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur propre et l'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & a \end{pmatrix}, (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \right\}$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. À l'aide d'un programme Python, déterminer la plus petite valeur propre parmi les matrices de F dont les coefficients sont égaux à 0 ou 1.

   On pourra par exemple utiliser la fonction `numpy.linalg.eig`*, comme le montre l'exemple suivant :*

   ```
   import numpy.linalg as la
   vap,vep=la.eig([[1,2],[3,4]])
   ```

   Après cette suite d'instructions, la variable `vap` *contient la liste des valeurs propres de la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *et la variable* `vep` *est une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de cette matrice.*

2. (a) Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   (b) Donner une base de $E \cap F$.

3. (a) Montrer que $A \in E \cap F$.

   (b) Montrer que A est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres et déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale vérifiant $A = PDP^t$ où P^t est la matrice transposée de P.

4. Vérifier que P^tMP est diagonale pour toute matrice M de $E \cap F$.

5. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer le spectre de $M = \begin{pmatrix} y+z & y & x \\ y & x+z & y \\ x & y & y+z \end{pmatrix}$.

Exercice sans préparation

1. Écrire une fonction qui prend en entrée un mot donné sous forme d'une chaîne de caractères et qui renvoie 1 si le nombre de caractères est impair et 0 si le nombre de caractères est pair.
2. Écrire une fonction `verlan` qui prend en entrée un mot et qui inverse les deux moitiés du mot.
   Par exemple : `verlan('bonjour')` renvoie `'ourjbon'`.
   `verlan('test')` renvoie `'stte'`.

Éléments de correction–Planche 1

Exercice avec préparation

On considère E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admettant le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur propre et l'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & a \end{pmatrix}, (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \right\}$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. On tourne sur toutes les matrices possibles avec un algorithme de recherche de minimum. La matrice nulle est dans la liste, on peut donc prendre 0 comme candidat minimum de démarrage.

```
F_liste = [np.array([[a,b,c],[b,d,e],[c,e,a]])
for a in [0,1] for b in [0,1]
for c in [0,1] for d in [0,1] for e in [0,1]
]

mini=0
F_mini=F_liste[0]
for F in F_liste:
    vap,vep=la.eig(F)
    mini0=vap.min()
    if mini0 <= mini:
        mini=mini0
        F_mini=F
print("min␣des␣v.p.␣:",mini,F_mini)
```

```
min des v.p., matrice -1.41421356237
[[0 1 1]
[1 0 0]
[1 0 0]]
```

Il semble que la plus petite v.p. soit $-\sqrt{2}$ pour (entre autres ?) la matrice $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. (a) — E est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admettant le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur propre. On a donc

$$M \in E \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad MU = \lambda U.$$

Le nombre λ est unique, il s'agit de la valeur propre associée aux vecteur propre U de M.

i. La matrice nulle est clairement dans E, il suffit de prendre $\lambda = 0$.

ii. Si M et M' sont dans E, λ, λ' les valeurs propres associées à U pour M et M' et si $\mu, \mu' \in \mathbb{R}$. On a alors

$$(\mu M + \mu' M')U = \mu\lambda U + \mu'\lambda' U = (\mu\lambda + \mu'\lambda')U$$

et donc $\mu M + \mu' M'$ admet U pour vecteur propre (de valeur propre associée $\mu\lambda + \mu'\lambda'$.)

iii. E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

— Par définition $F = \mathrm{Vect}(F_a, F_b, F_c, F_d, F_e)$ (F est donc un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) avec

$$F_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} F_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} F_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} F_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} F_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Pour une matrice $M \in F$, calculons MU. On a

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & a \end{pmatrix} \quad ; \quad M.U = \begin{pmatrix} a+b+c \\ b+d+e \\ c+e+a \end{pmatrix}$$

et donc MU est colinéaire à U si et seulement si

$$a+b+c = b+d+e = c+e+a$$

c'est-à-dire

$$b = e \quad \text{et} \quad a+c = d+e.$$

On a affaire un système de deux équations linéaires à 5 inconnues, il est échelonné (3 inconnues secondaires) et donc se résout en

$$M \in E \cap F \iff \exists (r,s,t) \in \mathbb{R}^3, \quad a = -r+s+t \quad ; \quad b = t \quad ; \quad c = r \quad ; \quad d = s \quad ; \quad e = t$$

c'est-à-dire

$$M \in E \iff \exists (r,s,t) \in \mathbb{R}^3, \quad M = \begin{pmatrix} -r+s+t & t & r \\ t & s & t \\ r & t & -r+s+t \end{pmatrix}$$

Les matrices

$$A_r = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_s = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_t = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

forment donc une famille génératrice de $E \cap F$. Vu la position des 0, il est clair que c'est une famille libre. C'est donc une base de $E \cap F$ qui est donc de dimension 3.

3. (a) Vu le calcul fait précédemment, il est clair que $A \in E \cap F$.

(b) La matrice A, symétrique réelle, est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres. On sait déjà que U est vecteur propre de A. On fait faire le calcul à la machine :

```
[[ 4.08248290e-01 7.07106781e-01 5.77350269e-01]
[ -8.16496581e-01 1.19612948e-17 5.77350269e-01]
```

```
[ 4.08248290e-01 -7.07106781e-01 5.77350269e-01]]
```

La dernière colonne est proportionnelle à U, la première à $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, la deuxième à $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a

$$AU = 2U \quad ; \quad AV_1 = -V_1 \quad ; \quad AV_2 = V_2$$

et donc en normant ces vecteurs, c'est-à-dire en posant

$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}U \quad ; \quad P_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}V_1 \quad ; \quad P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}V_2$$

et composant la matrice $P = (P_0|P_1|P_2)$ par colonnes, on obtient une matrice P orthogonale $P^{-1} = P^t$ telle que

$$P^tAP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

4. Soit $M \in E \cap F$. Reprenons notre notation de 2.(b),

$$M = rA_r + sA_s + tA_t.$$

On a :

$$\mathbb{P}^tA_sP = I_3 \quad ; \quad P^tA_tP = D$$

et enfin, comme

$$A_rU = 0U \quad ; \quad A_rV_1 = 0V_1 \quad ; \quad A_rV_2 = -2V_2$$

il vient

$$P^tA_rP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} =: D_r$$

et donc

$$P^tMP = rD_r + sI_3 + tD = \begin{pmatrix} s+2.t & 0 & 0 \\ 0 & s-t & 0 \\ 0 & 0 & -2r+s+t \end{pmatrix}$$

Cette matrice est diagonale.

5. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $M = \begin{pmatrix} y+z & y & x \\ y & x+z & y \\ x & y & y+z \end{pmatrix}$. Cette matrice est dans $E \cap F$ avec $r = x, s = x+z, t = y$, son spectre est donc

$$\{s+2t, s-t, -2r+s+t\} = \{x+z+2y, x+z-y, z+y-x\}$$

Exercice sans préparation

1. ```
   def is_pair(mot):
       return len(mot)%2
   ```

2. ```
   def verlan(mot):
       n = len(mot)
       if is_pair(mot)==0:
           k = n//2
           debut = mot[0:k]
           fin = mot[k:n]
           return fin+debut
       else:
           k=(n+1)//2
           debut = mot[0:k-1]
           milieu = mot[k-1]
           fin = mot[k:n]
           return fin+milieu+debut
   ```