Agro-Veto – Planche 2

Question de cours

Énoncer le théorème du rang.

Exercice avec préparation

Soit X un variable aléatoire à valeurs dans $\{-1,1\}$. On pose $\mathbb{P}(X=1)=p$ et on considère par ailleurs $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes, de même loi que X. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$T_n=\prod_{k=0}^{n} X_k.$$

1. (a) Écrire une fonction Python `T(n,p)` retournant une valeur simulée de la variable T_n, où $n=$ `n`, $p=$ `p`.
   (b) Écrire une fonction Python `Esp(n,p)` retournant une valeur estimée de l'espérance de la variable T_n. (On considère toujours que $n=$ `n`, $p=$ `p`)
2. (a) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$
   (b) En déduire $\mathbb{E}(T_n)$.
   (c) Déterminer la loi de T_n.
3. On cherche à déterminer cette loi par une autre méthode. On pose pour $n\in\mathbb{N}$, $p_n=\mathbb{P}(T_n=1)$.
   (a) Montrer en considérant le SCE $([X_{n+1}=1],[X_{n+1}=-1])$ que

   $$p_{n+1}=(2p-1)p_n+(1-p).$$

   (b) En déduire p_n et la loi de T_n.
4. Soit N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ où $\lambda>0$, indépendante des X_k. On définit $T=T_N=\displaystyle\prod_{k=0}^{N} X_k$ et on admet qu'il s'agit d'une variable aléatoire.
   (a) Montrer que la série de terme général $\mathbb{E}(T_n)\mathbb{P}(N=n)$ est convergente et montrer que

   $$\mathbb{E}(T)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{E}(T_n)\mathbb{P}(N=n).$$

   (b) Donner la valeur de $\mathbb{E}(T)$ et en déduire la loi de T.
5. Soit H une variable aléatoire réelle de loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda>0$, indépendante de X. On pose $D=HX$
   (a) Rappeler la loi de H, son espérance, sa variance.
   (b) Calculer la fonction de répartition de D.
   (c) Montrer que D est une v.a. à densité et en donner une densité.

Exercice sans préparation

1. Écrire une fonction qui prend en argument une liste L et qui renvoie le nombre de fois consécutives où le premier terme de la liste est répéter en début de liste.
   Tester avec `L=[1,1,3,1]` (renvoie 2) et avec `L=[1,3,1,1]` (renvoie 1).
2. On considère la suite logique suivante :

$$\begin{aligned} &u_0 = 1 \\ &u_1 = 11 \quad \text{(un 1)} \\ &u_2 = 21 \quad \text{(deux 1)} \\ &u_3 = 1211 \quad \text{(un 2, un 1)} \\ &u_4 = 111221 \quad \text{(un 1, un 2, deux 1)} \qquad \dots \end{aligned}$$

   Étant donné un terme de la suite, on trouve le terme suivant en décrivant les chiffres du terme donné, en regroupant les chiffres identiques consécutifs. Par exemple, le terme u_4 s'écrit 111221, donc il contient trois 1, puis deux 2, puis un 1.
   Le terme suivant dans la suite logique sera donc :

$$u_5 = 312211.$$

   Plutôt que de voir chaque terme de cette suite logique comme un entier, on le représentera en Python comme la liste de ses chiffres, de sorte à pouvoir accéder à chacun de ses chiffres séparément. Par exemple, le terme u_5 sera représenté par la liste `[3,1,2,2,1,1]`.
   Écrire une fonction qui prend en entrée un entier n et renvoie u_n.

Éléments de correction–Planche 2

Exercice avec préparation

1. ```
   def X(p):
       if np.random.rand() <p:
           return +1
       return -1

   def T(n,p):
       prod=1
       for k in range(n+1):
           prod=prod*X(p)
       return prod


   def Esp(n,p,NS=10000):
       E=0
       for s in range(NS):
           E+=T(n,p)
       return E/NS
   ```

   La commande `Esp(15,0.5)` retourne la moyenne empirique des valeurs de T_n sur un échantillon de taille `NS=10000`. D'après la loi des grands nombres, on peut considérer qu'il s'agit d'une valeur approchée de $\mathbb{E}(T_n)$.

   Après de multiples essais `Esp(15,0.5)` retourne des valeurs valant 0 à 10^{-2} près.

2. (a) On a
   $$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + (-1) \cdot \mathbb{P}(X = -1) = p - (1 - p) = 2p - 1$$
   et, comme $X^2 = 1$,
   $$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1 - (2p - 1)^2 = 4(1 - p)p.$$

   (b) Par indépendance des $(X_k), 0 \leq k \leq n$,
   $$\mathbb{E}(T_n) = \prod_{k=0}^{n} \mathbb{E}(X_k) = (2p - 1)^{n+1}.$$

   (c) Comme T_n est à valeurs dans $\{-1, 1\}$, en posant $p_n = \mathbb{P}(T_n = 1)$, on a $1-p_n = \mathbb{P}(T_n = -1)$ et
   $$\mathbb{E}(T_n) = 2p_n - 1$$
   Donc il vient que
   $$p_n = \frac{1}{2}(1 + (2p - 1)^{n+1}).$$

3. On cherche à déterminer cette loi par une autre méthode. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}(T_n = 1)$.
   ```

(a) En considérant le SCE $([X_{n+1}=1],[X_{n+1}=-1])$, on a

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}(T_{n+1}=1) & = & \mathbb{P}([T_{n+1}=1]\cap[X_{n+1}=1])+\mathbb{P}([T_{n+1}=1]\cap[X_{n+1}=-1]) \\ & = & \mathbb{P}[(T_n=1]\cap[X_{n+1}=1])+\mathbb{P}([T_n=-1]\cap[X_{n+1}=-1]) \\ \text{(indép.)} & = & \mathbb{P}(T_n=1)\mathbb{P}(X_{n+1}=1)+\mathbb{P}(T_n=-1)\mathbb{P}(X_{n+1}=-1) \\ & = & p_np+(1-p_n)(1-p) \\ & = & (2p-1)p_n+(1-p)\end{array}$$

(b) La suite (p_n) est arithmético-géométrique. La raison est $(2p-1)$. Le point fixe α vérifie $\alpha=(2p-1)\alpha+(1-p)$ donc $\alpha=\dfrac{1}{2}$ (on suppose $p\neq 1$).
Ainsi

$$\forall n\in\mathbb{N},\ p_n=(2p-1)^n(p_0-\alpha)+\alpha$$

Sachant que $p_0=p$, on retrouve bien

$$\forall n\in\mathbb{N},\ p_n=\frac{1}{2}((2p-1)^{n+1}+1).$$

On a donc

$$\mathbb{P}(T_n=1)=\frac{1}{2}((2p-1)^{n+1}+1)\quad ;\quad \mathbb{P}(T_n=-1)=\frac{1}{2}(-(2p-1)^{n+1}+1).$$

Enfin : $\mathbb{E}(T_n)=\mathbb{P}(T_n=1)-\mathbb{P}(T_n=-1)=(2p-1)^{n+1}$.

4. Soit N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ où $\lambda>0$, indépendante des X_k.
On définit $T=T_N=\displaystyle\prod_{k=0}^{N}X_k$ et on admet qu'il s'agit d'une variable aléatoire.

(a) La série de terme général $\mathbb{E}(T_n)\mathbb{P}(N=n)$ est la série

$$\sum_{n\geq 0}(2p-1)^{n+1}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$$

Il s'agit d'une série exponentielle appliquée en $x=(2p-1)\lambda$, donc absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{((2p-1)\lambda)^n}{n!}e^{-\lambda}=e^{(2p-1)\lambda}e^{-\lambda}=e^{2(p-1)\lambda}$$

et donc la série en considération est convergente avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(2p-1)^{n+1}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=(2p-1)e^{2(p-1)\lambda}.$$

La v.a. T est à valeurs dans $\{-1,1\}$, calculons $\mathbb{P}(T=1)$ en conditionnant sur les valeurs de N : la famille d'événements $(N=n),n\in\mathbb{N}$ est un SCE dénombrable et on a donc

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}(T=1) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(T=1,N=n) \\ & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(T_n=1,N=n) \\ \text{(indép.)} & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(T_n=1)\mathbb{P}(N=n)\end{array}$$

De même,

$$\mathbb{P}(T=-1) \quad = \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n=-1)\mathbb{P}(N=n)$$

et finalement

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) = \mathbb{P}(T=1) - \mathbb{P}(T=-1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{P}(T_n=1) - \mathbb{P}(T_n=-1))\mathbb{P}(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(T_n)\mathbb{P}(N=n).\end{aligned}$$

(b) On a donc

$$\mathbb{E}(T) = (2p-1)e^{2(p-1)\lambda}$$

On a

$$\mathbb{E}(T) = 2\mathbb{P}(T=1) - 1 = 1 - 2\mathbb{P}(T=-1)$$

et donc

$$\mathbb{P}(T=1) = \frac{1}{2}(2p-1)e^{2(p-1)\lambda} + \frac{1}{2} \quad ; \quad \mathbb{P}(T=-1) = -\frac{1}{2}(2p-1)e^{2(p-1)\lambda} + \frac{1}{2}$$

5. Soit H une variable aléatoire réelle de loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda > 0$, indépendante de X. On pose $D = HX$

(a) Une densité de H est

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda.e^{-\lambda.x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On a $\mathbb{E}(H) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $\mathbb{V}(H) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.
Sa fonction de répartition est donnée par

$$F_H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda.x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(b) La v.a. D est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Calculons sa fonction de répartition en conditionnant sur les valeurs de X. Soit $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D \leq y) &= \mathbb{P}(X.D \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X.H \leq y, X=1) + \mathbb{P}(X.H \leq y, X=-1) \\ &= \mathbb{P}(H \leq y, X=1) + \mathbb{P}(H \geq -y, X=-1) \\ \text{(indép.)} \quad &= \mathbb{P}(H \leq y)\mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(H \geq -y)\mathbb{P}(X=-1) \\ &= \mathbb{P}(H \leq y)p + (1 - \mathbb{P}(H \leq -y)(1-p) \\ &= \begin{cases} (1-p)e^{\lambda y} & \text{si } y < 0 \\ -pe^{-\lambda y} + 1 & \text{si } y \geq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

(c) La fonction de répartition précédente est continue sur $\mathbb{R}$ (remarquer que pour le seul problème de continuité potentiellement sérieux, à la jonction en 0, valeur, limite à droite et à gauche valent toutes trois $1-p$), $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en 0. La v.a D est donc une v.a. à densité dont une densité est

$$y \mapsto \begin{cases} (1-p)\lambda e^{\lambda y} & \text{si } y < 0 \\ p\lambda e^{-\lambda y} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

Exercice sans préparation

1.
```
def q1(L):
    compteur = 0
    for k in range(len(L)):
        if L[k]==L[0]:
            compteur +=1
        else:
            return compteur
    return compteur
```

2.
```
def q2(n):
    u = [1]
    for k in range(n):
        L = []
        while len(u) !=0:
            L.append(q1(u))
            L.append(u[0])
            for i in range(q1(u)):
                u.pop(0)
        u=L
    return u
```