Agro-Veto – Planche 7

Question de cours

Fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$.

Exercice avec préparation

On note $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel noté $(.,.)$ et de sa norme associée $\|.\|$. Soient u et v deux vecteurs de norme 1. On définit l'endomorphisme f de E par :

$$f(w) = (w, u)v + (w, v)u.$$

1. (a) Écrire une fonction Python `ps(u, v)` qui prend en argument deux vecteurs u et v sous forme de listes et renvoie la valeur du produit scalaire (u, v).
   (b) Écrire une fonction Python `f(u, v, w)` qui prend en argument trois vecteurs sous forme de liste et renvoie le vecteur $f(w)$ sous forme de liste aussi.
2. On suppose uniquement dans cette question que u et v sont colinéaires.
   (a) Montrer que, pour tout $w \in E$, on a $f(w) = \pm 2(w, u)u$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$.
   (c) Montrer que u est un vecteur propre de f et déterminer sa valeur propre associée.
   (d) En déduire que f est diagonalisable.
3. À partir de maintenant, les vecteurs u et v seront non colinéaires.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u, v)$.
   (b) En déduire la dimension de $\ker(f)$.
4. On suppose uniquement dans cette question que u et v sont orthogonaux.
   (a) Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2})$ une base orthonormée de $\ker(f)$. Montrer que $\mathcal{C} = (u, v, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2})$ est une base orthonormée de E.
   (b) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.
   (c) En déduire que f est diagonalisable.
5. On revient au cas général (u et v sont non colinéaires mais pas nécessairement orthogonaux).
   (a) Soit $(w_1, \ldots, w_{n-2})$ une base de $\ker(f)$. Montrer que $\mathcal{D} = (u, v, w_1, \ldots, w_{n-2})$ est une base de E.
   (b) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{D}$.
   (c) En déduire que f est diagonalisable.

Exercice sans préparation

1. Ècrire une fonction qui prend en entrée une chaine de caractère et qui renvoie la chaine caractère obtenue en enlevant sa première et dernière lettre.
2. On rappelle qu'un mot est un palindrome s'il se lit aussi bien de gauche à droite que de droite à gauche, par exemple le mot KAYAK ou le prénom ANNA. On souhaite écrire une fonction **récursive** `est_palindrome(m)` qui prend en argument une chaine de caractères `m` et qui renvoie `True` si `m` est un palindrome et `False` sinon.

Éléments de correction–Planche 7

Exercice avec préparation

On définit l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^n$ par :

$$f(w) = (w,u)v + (w,v)u.$$

1. (a)
```
def ps(u,v):
    """ u,v deux vecteurs de même longueur
    donnés sous forme de listes de flottants
    retourne leur produit scalaire"""
    S = 0.0
    for i in range(len(u)):
        S += u[i]*v[i]
    return S
```
   (b)
```
def f(u,v,w) :
    """ retourne f(w) """
    cv = ps(u,w)
    cu = ps(v,w)
    fw = []
    for i in range(len(u)):
        fw.append(cv*v[i] + cu*u[i])
    return fw
```
2. On suppose uniquement dans cette question que u et v sont colinéaires.
   (a) Comme u et v sont de norme 1 et colinéaires, $v = \epsilon.u$ où $\epsilon = \pm 1$ est fixé.
   On a donc, en substituant, pour tout $w \in E$,
   $$f(w) = (w,u)\epsilon u + \epsilon(w,u)u = \epsilon 2(w,u)u.$$
   Remarque : L'énoncé donné est maladroit, en pouvant sous entendre que le signe $\pm$ dans la formule proposée peut dépendre de w.
   (b) On constate donc que pour tout w, $f(w)$ est colinéaire à u, c'est à dire que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}(u)$.
   En termes de dimension, $\mathrm{Vect}(u)$ est une droite vectorielle, de dimension 1 et donc soit $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$, soit $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$, c'est à dire que f est l'application nulle.
   Comme $f(u) = \epsilon 2u \neq 0$, ce dernier cas est exclus et on a
   $$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u).$$
   (c) On vient de voir que $f(u) = 2\epsilon.u$ et $u \neq 0$. Donc u est un vecteur propre de f de valeur propre associée 2ϵ.
   (d) Par le théorème du rang, le noyau E_0 (espace propre de f associé à 0) de f est de dimension $n-1$.
   La question précédente donne que l'espace propre $E_{2\epsilon}$ de f associé à 2ϵ est de dimension au moins 1.

Or on sait que

$$\dim E_0 + \dim E_{2\epsilon} \leq n.$$

Par conséquent, il vient que $\dim E_{2\epsilon} = 1$, $\dim E_0 + \dim E_{2\epsilon} = n$, f n'a pas d'autres valeurs propres que celles déjà trouvées et f est diagonalisable.

3. À partir de maintenant, les vecteurs u et v seront non colinéaires.

   (a) De la formule pour $f(w)$, il est clair que $f(w)$ est combinaison linéaire de u et v et donc que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}(u, v)$.

   La famille $\mathcal{P} = (u, v)$ étant libre (hypothèse de non colinéarité), elle forme une base de $P = \mathrm{Vect}(u, v)$ qui est donc de dimension 2.

   Essayons plusieurs points d'attaque :

   — L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ se restreint en un endomorphisme $\tilde{f}$ de P et comme

   $$f(u) = (u, v)u + v \quad \text{et} \quad f(v) = u + (u, v)v$$

   la matrice de $\tilde{f}$ dans la base $\mathcal{P}$ est

   $$M = \begin{pmatrix} (u, v) & 1 \\ 1 & (u, v) \end{pmatrix}.$$

   Le déterminant de cette matrice est $(u, v)^2 - 1$.

   Si celui-ci est non-nul, M est inversible, l'espace image de $\tilde{f}$ est P et on a démontré l'égalité attendue $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u, v)$.

   Si $(u, v)^2 - 1 = 0$, on a donc $(u, v)^2 = \|u\|^2.\|v\|^2$ et donc on est dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ce cas d'égalité implique que les deux vecteurs sont colinéaires, ce qui amène la contradiction voulue.

   — On peut aussi tenter d'observer le noyau de f : nous savons par le théorème du rang que celui-ci est de dimension $\geq n - 2$, car l'image de f est de dimension ≤ 2. Comme (u, v) est libre, pour $w \in \mathbb{R}^n$,

   $$w \in \ker(f) \iff (w, u) = 0 \quad \text{et} \quad (w, v) = 0.$$

   Ainsi :

   $$\ker(f) = \mathrm{Vect}(u, v)^{\perp}.$$

   D'où

   $$\dim(\ker(f)) = n - \dim(\mathrm{Vect}(u, v)) = n - 2$$

   puis par le théorème du rang $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 = dim(\mathrm{Vect}(u, v))$. Avec l'inclusion, on en déduit l'égalité $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u, v)$.

   (b) Par la discussion précédente (et/ou le théorème du rang) la dimension de $\ker(f)$ est $n - 2$.

4. On suppose uniquement dans cette question que u et v sont orthogonaux.

   (a) Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2})$ une base orthonormée de $\ker(f)$.

   Soit $\mathcal{C} = (u, v, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2})$.

   Pour $k \in [\![1, n - 2]\!]$, on a $f(\varepsilon_k) = 0$ et donc

   $$(\varepsilon_k, u)v + (\varepsilon_k, v)u = 0$$

   Du fait que (u, v) est libre, on en déduit que

   $$(\varepsilon_k, u) = (\varepsilon_k, v) = 0.$$

   Maintenant si s et t sont deux vecteurs distincts de la famille $\mathcal{C}$, soit :

— s et t sont des ε_k et donc leur produit scalaire vaut 0, du fait que $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2})$ une base orthonormée de $\ker(f)$;
— s et t sont pour l'un, un des ε_k, pour l'autre un des deux vecteurs u ou v et donc leur produit scalaire vaut 0, du fait du calcul introductif ;
— s et t sont pour l'un u et pour l'autre v et donc leur produit scalaire vaut 0, du fait de l'hypothèse sur u et v.

Par ailleurs tous les vecteurs de $\mathcal{C}$ sont unitaires.

En conclusion $\mathcal{C}$ est une base orthonormée de E.

(b) La construction de la matrice M de f dans la base $\mathcal{C}$ se fait par « blocs » et on obtient, du fait que

$$f(u) = v,\ f(v) = u,\ f(\varepsilon_k) = 0$$

que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

(c) La matrice M est symétrique réelle et donc f est diagonalisable.

5. On revient au cas général (u et v sont non colinéaires mais pas nécessairement orthogonaux).

(a) Soit $(w_1, \ldots, w_{n-2})$ une base de $\ker(f)$.

Pour montrer que $\mathcal{D} = (u, v, w_1, \ldots, w_{n-2})$ est une base de E, on montre qu'elle est libre (comme elle a le bon nombre d'éléments, ce sera gagné).

On remarque que par le même calcul préliminaire que précédemment, pour tout $k \in [\![1, n-2]\!]$, comme $w_k \in \ker(f)$ alors

$$(w_k, u) = (w_k, v) = 0.$$

Soient $\mu, \nu, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}$ des nombres réels tels que

$$\mu u + \nu v + \sum_{k=1}^{n-2} \lambda_k w_k = 0.$$

En prenant le produit scalaire avec un vecteur quelconque de $P = \mathrm{Vect}(u, v)$ de la forme $s = \alpha u + \beta v$, il vient :

$$(\mu u + \nu v, s) = 0$$

et notamment en prenant $s = \mu u + \nu v$, on obtient que $\|\mu u + \nu v\|^2 = 0$ et donc que $\mu u + \nu v = 0$.

Comme (u, v) est libre, $\mu = \nu = 0$ et il reste de l'identité initiale :

$$\sum_{k=1}^{n-2} \lambda_k . w_k = 0.$$

La famille des w_k, $k \in [\![1, n-2]\!]$ étant libre, chaque λ_k, $k \in [\![1, n-2]\!]$ est nul et finalement la famille $\mathcal{D}$ est libre.

(b) La matrice N de f dans la base $\mathcal{D}$ est

$$N = \begin{pmatrix} (u,v) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (u,v) & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(c) La matrice N est symétrique réelle, elle est diagonalisable et f est diagonalisable.

Exercice sans préparation

1. ```python
def q1(chaine):
    n = len(chaine)
    L = ''
    for k in range(1,n-1):
        L=L+chaine[k]
    return L
```

2. ```python
def palindrome(chaine):
    n =len(chaine)
    if n<2:
        return True
    else:
        if chaine[n-1]==chaine[0]:
            return palindrome(q1(chaine))
        else:
            return False
```