Agro-Veto – Planche 3

Question de cours

Définition de la notion d'indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.

Exercice avec préparation

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définie les fonctions réelles de variable réelle f_n et g_n par les formules

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+x^k) \quad \text{et} \quad g_n(x) = \prod_{\ell=1}^{n}(1-x^{2\ell-1}).$$

1. Sur Python, tracer, pour $n = 100$, les points de coordonnées $(f_n(x), g_n(x))$ pour x variant dans l'ensemble $\left\{\dfrac{k}{100}, \, k \in [\![0, 80]\!]\right\}$.
2. Montrer : $\forall t \in \mathbb{R}$, $1 + t \leq e^t$.
3. On fixe $x \in [0, 1[$.
   (a) Montrer que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 1 et croissante.
   (b) Montrer, en utilisant l'inégalité démontrée en 2, que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que sa limite, notée $f(x)$, vérifie
   $$1 \leq f(x) \leq e^{\frac{x}{1-x}}.$$
4. La fonction $f : x \mapsto f(x)$ définie sur $[0, 1[$ est-elle continue en 0^+ ?
5. (a) On fixe $x \in [0, 1[$. Montrer que la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 1, décroissante. Montrer que la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite noté $g(x)$.
   (b) Montrer que pour tout $t \in \left[0 \frac{1}{2}\right]$ on a : $1 - t \geq e^{-2t}$.
   (c) Montrer, en utilisant 5.(b), que lorsque $0 \leq x \ \leq \dfrac{1}{2}$ on a : $1 \geq g(x) \geq e^{-2\frac{x}{1-x^2}}$.
   (d) La fonction $g : x \mapsto g(x)$ est-elle continue en 0^+ ?
6. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $x \in [0, 1[$,
   $$f_{2n}(x).g_n(x) = f_n(x^2).g_n(x^2)$$
   et en déduire que
   $$\forall x \in [0, 1[, \; f(x).g(x) = f(x^2).g(x^2)$$
   (b) Montrer que finalement
   $$\forall x \in [0, 1[, \; f(x).g(x) = 1$$
   et interpréter ceci sur le graphique obtenu en 1.

Exercice sans préparation

L'*écriture binaire* d'un nombre revient à donner ce nombre comme somme de puissances de 2 distinctes. Par exemple,

$$6 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$

donc 6 s'écrit « 110 » en binaire. De même,

$$9 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

donc 9 s'écrit « 1001 » en binaire.

1. Écrire une fonction `decimal(L)` prenant en entrée une liste d'entiers `L` contenant les chiffres de l'écriture en binaire d'un entier n et renvoyant n en écriture décimale. Par exemple :

   ```
   decimal([1,1,0])
   ```

   doit renvoyer 6.
2. Écrire une fonction `binaire(n)` qui prend en entrée un nombre positif n et qui renvoie sont écriture binaire. Par exemple :

   ```
   binaire(6)
   ```

   doit renvoyer 110.

Éléments de correction–Planche 3

Exercice avec préparation

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définie les fonctions réelles de variable réelle f_n et g_n par les formules

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+x^k) \quad \text{et} \quad g_n(x) = \prod_{\ell=1}^{n}(1-x^{2\ell-1}).$$

1. En python, en utilisant le script suivant, on obtient le graphique de la figure 1.

```
def f(x,n=100):
    y=x*0+1
    for k in range(1,n+1):
        y=y*(1+x**k)
    return y

def g(x,n=100):
    y=x*0+1
    for k in range(1,n+1):
        y=y*(1-x**(2*k-1))
    return y


x=np.linspace(0,0.8,100)
fx=f(x)
gx=g(x)

plt.subplots()
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.plot(fx,gx)
plt.grid()
```

2. On étudie $h(x) = e^x - 1 - x$...
3. On fixe $x \in [0,1[$.
   (a) On a la relation de récurrence suivante

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1}(x) = \underbrace{(1+x^{n+1})}_{\geq 1} f_n(x).$$

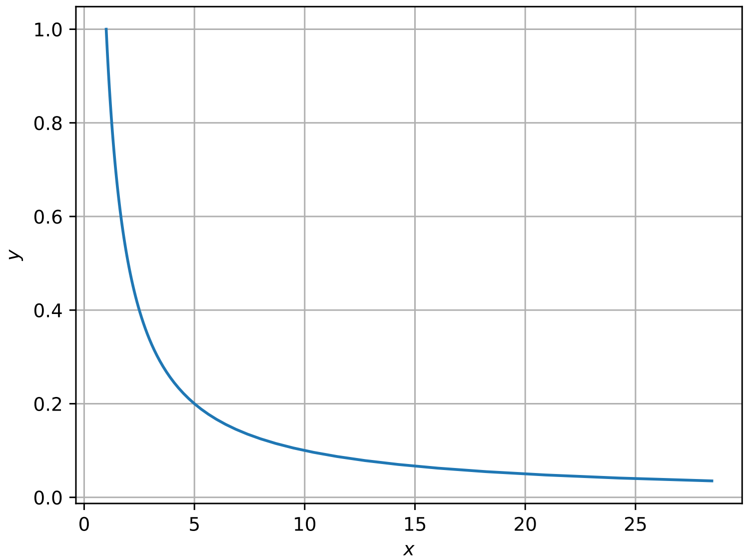
Sachant que $f_0(x) = 1$, une récurrence évidente montre que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \geq 1$$

On a par ailleurs, pour la suite positive $f_n(x)$ que

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = 1 + x^{n+1} \geq 1$$

et donc la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 1 et croissante.



(b) En écrivant, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $0 < 1 + x^k \leq e^{x^k}$ alors, pour $n \geq 1$, on a

$$f_n(x) \leq e^x e^{x^2} \dots e^{x^n} = e^{x+x^2+\cdots+x^n}.$$

On reconnait une somme géométrique et donc

$$f_n(x) \leq e^{x\frac{1-x^n}{1-x}} \leq e^{\frac{x}{1-x}}.$$

Ceci étant vrai pour tout entier n, la suite $(f_n(x))$ est majorée.
Étant croissante, majorée, la suite $(f_n(x))$ est convergente vers une certaine limite noté $f(x)$ et, en passant les inégalités à la limite, on obtient

$$1 \leq f(x) \leq e^{\frac{x}{1-x}}$$

On peut noter que pour $x = 0$ (et c'est le seul cas), la suite $f_n(0)$ est constante valant 1 et donc $f(0) = 1$.

4. L'inégalité précédente et le théorème des gendarmes montrent que lorsque x tend vers 0^+, comme $\dfrac{x}{1-x}$ tend vers 0 alors $f(x)$ tend vers $1 = f(0)$.
La fonction f définie sur $[0, 1[$ par le procédé de limite précédent est donc continue en 0^+.

5. (a) On fixe $x \in [0, 1[$. On a la relation de récurrence suivante

$$\forall n \in \mathbb{N},\ g_{n+1}(x) = \underbrace{(1 - x^{2n+1})}_{\geq 1} g_n(x)$$

en ayant posé $g_0(x) = 1$.
Pour $x = 0$, il est clair que $g_n(x) = 1$ et en général, comme on a $1 \geq (1 - x^{2n+1}) > 0$, une récurrence évidente montre que

$$0 < g_n(x) \leq 1$$

On a par ailleurs, pour la suite positive $g_n(x)$ que

$$\frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)} = 1 - x^{2n+1} \leq 1$$

et donc la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 1, décroissante. Elle est donc convergente et on note sa limite $g(x)$.

(b) Là encore, en posant $h(t) = 1 - t - e^{-2t}$ pour tout $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a $h'(t) = -1 + 2e^{-2t}$.

Cette quantité s'annule en $t_m = \frac{1}{2}\ln(2) > 0$, est strictement positive sur $]-\infty, t_m[$ et est strictement négative sur $]t_m, +\infty[$.

Ainsi, h est maximale en $t = t_m$ avec pour valeur maximale $f(t_m) = 1 - t_m + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - t_m > 0$.

On a $h(0) = 0$, $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - e^{-1} > 0$ et d'après le tableau de variations de h (à dessiner !!),

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad h(t) \geq 0$$

c'est-à-dire

$$1 - t \geq e^{-2t}.$$

(c) Pour $0 \leq x \ \leq \frac{1}{2}$ et $\ell \in [\![1, n]\!]$ on a $0 \leq x^{2\ell-1} \leq x \leq \frac{1}{2}$. Donc

$$e^{-2x^{2\ell-1}} \leq (1 - x^{2\ell-1}) \leq 1.$$

Par produit d'exponentielles,

$$e^{-2\sum_{\ell=1}^{n} x^{2\ell-1}} \leq \prod_{\ell=1}^{n}(1 - x^{2\ell-1}) \leq 1.$$

On a

$$\sum_{\ell=1}^{n} x^{2\ell-1} = \frac{x^2}{x}\frac{1 - x^{2n}}{1 - x^2} \leq x\frac{1}{1 - x^2}$$

(pour $x \neq 0$ mais c'est aussi vrai pour $x = 0$) et donc (par décroissance de $t \mapsto e^{-2t}$),

$$1 \geq g_n(x) \geq e^{-2\frac{x}{1-x^2}} > 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \geq 1$, en passant à la limite, on obtient

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad e^{-2\frac{x}{1-x^2}} \leq g(x) \leq 1.$$

(d) Lorsque x tend vers 0^+, on peut considérer que $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, l'inégalité précédente est vraie et, par le théorème des gendarmes, les deux extrêmes de l'inégalité ayant 1 pour limite en 0, on obtient que

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1.$$

On a vu que $g(0) = 1$ et donc g est continue en 0^+.

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0,1[$, on a

$$\begin{aligned}
f_{2n}(x).g_n(x) &= \prod_{k=1}^{2n}(1+x^k).\prod_{\ell=1}^{n}(1-x^{2\ell-1}) \\
&= \prod_{k=1, k \text{ pair}}^{2n}(1+x^k).\prod_{k=1, k \text{ impair}}^{2n}(1+x^k).\prod_{\ell=1}^{n}(1-x^{2\ell-1}) \\
&= \prod_{\ell=1}^{n}(1+x^{2\ell}).\prod_{\ell=1}^{n}(1+x^{2\ell-1}).\prod_{\ell=1}^{n}(1-x^{2\ell-1}) \\
&= f_n(x^2).\prod_{\ell=1}^{n}(1-x^{2\ell-1}).(1+x^{2\ell-1}) \\
&= f_n(x^2).\prod_{\ell=1}^{n}(1-(x^2)^{2\ell-1}) \\
&= f_n(x^2).g_n(x^2)
\end{aligned}$$

Et donc

$$\forall n \geq 1, \quad f_{2n}(x).g_n(x) = f_n(x^2).g_n(x^2).$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ (on rappelle que x est fixé), on a

$$f(x)g(x) = f(x^2)g(x^2)$$

et donc, ceci étant vrai pour tout $x \in [0,1[$,

$$\forall x \in [0,1[, \ f(x)g(x) = f(x^2)g(x^2).$$

(b) Soit $x \in [0,1[$. Par récurrence dans la question précédente, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ f(x)g(x) = f(x^{2^n})g(x^{2^n})$$

et, comme lorsque $n \to +\infty$, $x^{2^n} \to 0^+$ et que f et g sont continues en 0^+, en passant à la limite les égalités précédentes, il vient

$$f(x)g(x) = 1.$$

Ceci implique que l'ensemble $\{(f(x), g(x)), \ x \in [0,1[\}$ est contenu dans l'hyperbole $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x.y = 1\}$ c'est ce que l'on observe approximativement sur le graphique obtenu en 1.

Exercice sans préparation

1. ```python
   def binaire_to_decimal(L):
       s = 0
       for k in range(len(L)):
           s += L[k]*2**(len(L)-k-1)
       return s
   ```

2. Soit n un entier naturel. En effectuant la division euclidienne de n par 2 , on obtient

   $$n = 2q + r$$

   où $q < n$ est le quotient et $r \in \{0, 1\}$ le reste.
   En notant $[\varepsilon_k, \dots, \varepsilon_0]$ l'écriture binaire de q on a :

   $$\begin{aligned} n = 2q + r &= 2(\varepsilon_k 2^k + \cdots + \varepsilon_0 2^0) + r \\ &= \varepsilon_k 2^{k+1} + \cdots + \varepsilon_0 2^1 + r2^0 \end{aligned}$$

   et l'écriture binaire de n est donc $[\varepsilon_k, \dots, \varepsilon_0, r]$. On en déduite le programme récursif suivant :

   ```python
   def decimal_to_binaire(n):
       if n==0:
           return [0]
       elif n == 1:
           return [1]
       else:
           q,r = n//2, n%2
           L = decimal_to_binaire(q)
           L.append(r)
           return L
   ```
   ```