

Question de cours

Énoncer l'inégalité de Markov.

Exercice avec préparation

On considère deux urnes A et B et 3 boules numérotées de 1 à 3.

On répartit initialement les boules entre les deux urnes, puis on effectue une série illimitée d'étapes selon le protocole suivant : à chaque étape, on tire au hasard un nombre entre 1 et 3 et on transfère la boule portant le numéro correspondant dans l'urne où elle n'était pas.

On note X_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes initialement dans l'urne A et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne A après n étapes. On suppose que X_0 suit la loi uniforme sur $\llbracket 0, 3 \rrbracket$.

1. Écrire une fonction Python qui prend en argument une valeur de n , simule la réalisation de la variable aléatoire X_n et renvoie la valeur de X_n obtenue.

$$2. \text{ Soient } M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix}.$$

Déterminer U_0 et démontrer que pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = MU_n$.

3. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E .

Soit φ l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad \varphi(P) = XP(X) + \frac{1}{3}(1 - X^2)P'(X).$$

- (a) Montrer que φ est un endomorphisme de E , justifier que sa matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M .

- (b) Pour tout $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, on pose : $P_k(X) = \frac{1}{8}(X - 1)^k(X + 1)^{3-k}$.

Démontrer que pour tout $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, $\varphi(P_k) = \left(1 - \frac{2}{3}k\right) P_k$.

- (c) En déduire que l'endomorphisme est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

Exercice avec préparation

4. On pose : $Q = \frac{1}{4}(X^3 + X^2 + X + 1)$.
- (a) Expliciter les coordonnées de Q dans la base $\mathcal{B}$. Quel vecteur retrouve-t-on ?
 - (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi^n(Q) = P_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n P_2$.
5. À l'aide des questions précédentes, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = 1)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = 2)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = 3)$. Par quelle loi pourrait-on approcher la loi de X_n pour une grande valeur de n ?
6. Vérifier le résultat de la question précédente à l'aide d'une simulation informatique.

Exercice sans préparation

1. (a) Écrire une fonction qui prend en arguments un caractère `caractere` et une chaîne de caractère `chaîne` et qui renvoie `True` si le caractère `caractere` appartient à la chaîne `chaîne` et `False` sinon.
(b) Écrire une fonction `contient_sept` qui prend en argument un entier n et qui renvoie `True` si l'écriture décimale de n contient le chiffre 7 et `False` sinon.
2. Écrire une fonction qui prend en argument un entier N et renvoie la liste des N premiers entiers naturels qui ne sont pas des multiples de 7 ni ne contiennent le chiffre 7 dans leur écriture décimale.

Éléments de correction—Planche 4

Exercice avec préparation

```
1. import random as rd
   #Attention les boules sont en fait numérotées de 0 à 2 dans tout le code
   def X(n):
       urne = [0]*3 #urne[boule] =A ou B (1 ou 0)
       for i in range(3):
           if rd.random() < .5:
               urne[i] = 1
       for _ in range(n):
           k = rd.randint(0,2) #module random : borne gauche incluse
           urne[k] = 1 - urne[k]
       return sum(urne)
```

2. La loi de X_0 étant uniforme sur $\llbracket 0, 3 \rrbracket$, chaque $\mathbb{P}(X_0 = i)$ pour $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ est $\frac{1}{4}$. Donc

$$U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la formule des probabilités totales avec le SCE : $([X_n = i])_{i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket}$, pour tout $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^3 \mathbb{P}_{X_n=i}(X_{n+1} = k) \mathbb{P}(X_n = i).$$

Ensuite il faut remarquer que :

— pour avoir $X_{n+1} = 0$, nécessairement on avait $X_n = 1$, et c'est la boule qui était dans A qui a été choisie, avec donc probabilité $\frac{1}{3}$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{3} \mathbb{P}(X_n = 1);$$

— pour avoir $X_{n+1} = 1$, deux choix sont possibles : on avait $X_n = 2$, et on a enlevé une boule de A (probabilité $\frac{2}{3}$), ou il n'y avait aucune boule dans A , et on en rajoute alors une avec probabilité 1 ; d'où

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{2}{3} \mathbb{P}(X_n = 2);$$

— pour avoir $X_{n+1} = 2$, deux choix sont possibles : on avait trois boules dans A , et on en retire une avec probabilité 1, ou on en avait une, et on en rajoute une autre (probabilité $\frac{2}{3}$) ; d'où

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 2) = \mathbb{P}(X_n = 3) + \frac{2}{3} \mathbb{P}(X_n = 1);$$

- Enfin, pour avoir $X_{n+1} = 3$, il y avait nécessairement deux boules dans A , et on choisit le numéro de la boule dans B (probabilité $\frac{1}{3}$) ; d'où

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 2).$$

On obtient bien :

$$U_{n+1} = MU_n.$$

3. (a) Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, par linéarité de la dérivation, on a bien

$$\begin{aligned}\varphi(P + \lambda Q) &= X(P(X) + \lambda Q(X)) + \frac{1}{3}(1 - X^2)(P'(X) + \lambda Q'(X)) \\ &= \varphi(P) + \lambda Q(X).\end{aligned}$$

L'application φ est donc linéaire.

On note ensuite que

$$\begin{aligned}\text{— } \varphi(1) &= X \\ \text{— } \varphi(X) &= X^2 + \frac{1}{3}(1 - X^2) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}X^2 \\ \text{— } \varphi(X^2) &= X^3 + \frac{2}{3}(1 - X^2)X = \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}X^3 \\ \text{— } \varphi(X^3) &= X^4 + (1 - X^2)X^2 = X^2\end{aligned}$$

En particulier, par linéarité, tout polynôme de degré inférieur ou égal à 3 aura une image de degré inférieur ou égal à 3 et φ est donc un endomorphisme de E . De plus, les images des vecteurs de la base canonique donne bien la matrice M .

- (b) Commençons par calculer P'_k :

$$P'_k(X) = \frac{1}{8} (k(X-1)^{k-1}(X+1)^{3-k} + (3-k)(X-1)^k(X+1)^{3-k-1}).$$

On a donc

$$\begin{aligned}\varphi(P_k) &= XP_k(X) + \frac{1}{3}(1-X)(1+X)P'_k \\ &= XP_k(X) \\ &\quad - \frac{1}{3} \left(k \frac{1}{8} (X-1)^k (X+1)^{3-k} (X+1) + \frac{1}{8} (3-k)(X-1)(X-1)^k (X+1)^{3-k-1} \right) \\ &= XP_k(X) - \frac{1}{3} (k(X+1)P_k(X) + (3-k)(X-1)P_k(X)) \\ &= P_k(X) \left(X - \frac{k}{3}(X+1) - \frac{3-k}{3}(X-1) \right) \\ &= \left(1 - \frac{2}{3}k \right) P_k(X).\end{aligned}$$

- (c) Les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3 étant non nuls, ils sont donc vecteurs propres de φ associés aux valeurs propres respectives $1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ et -1 . L'endomorphisme φ admet donc 4 valeurs propres distinctes, et est donc diagonalisable, E étant de dimension 4.

4. (a) Dans la base $\mathcal{B}$, Q a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. On retrouve alors le vecteur U_0 .
 (b) Montrons le par récurrence sur n :
 — On a bien

$$\begin{aligned} P_0 + P_2 &= \frac{1}{8}(X+1)^3 + \frac{1}{8}(X-1)^2(X+1) \\ &= \frac{1}{8}(X^3 + 3X^2 + 3X + 1) + \frac{1}{8}(X^3 - X^2 - X + 1) \\ &= \frac{1}{8}(2X^3 + 2X^2 + 2X + 2) \\ &= Q \\ &= \varphi^0(Q) \end{aligned}$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons l'égalité vraie pour ce rang. Alors

$$\varphi^{n+1}(Q) = \varphi \left(P_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n P_2 \right) = P_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} P_2$$

par linéarité, et P_0 et P_2 étant vecteurs propres de φ .

5. Une rapide récurrence à partir de la question 2 permet de montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = M^n U_0,$$

et donc en repassant aux endomorphismes, pour tout n , U_n a les mêmes coordonnées que $\varphi^n(X)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Commençons par calculer :

$$\begin{aligned} P_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n P_2 &= \frac{1}{8}(X+1)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \frac{1}{8}(X-1)^2(X+1) \\ &= \frac{1}{8} \left(X^3 + 3X^2 + 3X + 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n X^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n X^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n X + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) X^3 + \left(3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) X^2 + \left(3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) X + \left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \right). \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = 0) &= \frac{1}{8} \left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right), \quad \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{8} \left(3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right), \\ \mathbb{P}(X_n = 2) &= \frac{1}{8} \left(3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right), \quad \mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1}{8} \left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Pour des grandes valeurs de n , on pourrait alors négliger le terme $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ et simuler X_n par une variable de loi $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$.

```
6.  def loiX(n, NS=10000):  
    loi = [0]*4  
    for s in range(NS):  
        k = X(n)  
        loi[k] += 1  
    for k in range(len(loi)):  
        loi[k] = loi[k]/NS  
    return loi
```

Exercice sans préparation

1. (a)

```
def q1(chaine, caractere):  
    for k in chaine :  
        if k == caractere:  
            return True  
    return False
```


(b)

```
def contient_sept(n):  
    chaine = str(n)  
    caractere = str(7)  
    return q1(chaine, caractere)
```
2.

```
def passept(N):  
    L = []  
    for k in range(N+1):  
        if k%7 != 0 and not q1(str(k), '7'):  
            L.append(k)  
    return L
```