

Question de cours

Loi exponentielle de paramètre 1 (fonction de répartition et densité).

Exercice avec préparation

Rappel : la méthode d'Euler permet d'approcher la solution φ d'une équation différentielle au voisinage d'un point connu, en utilisant, de proche en proche, l'approximation affine de la fonction au voisinage de chaque point : en tout point a , $\varphi(a+h) \simeq \varphi(a) + h\varphi'(a)$, lorsque h est petit (positif ou négatif). Soit $I =]1, +\infty[$, et on considère l'équation différentielle suivante :

$$\forall t \in I, \quad -t^2 y'(t) + ty(t) = (y(t))^2 \quad (\text{E})$$

ayant pour inconnue une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I .

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions solutions de cette équation différentielle.

1. (a) Montrer que la fonction $f : t \mapsto \frac{t}{\ln(t)}$ est une solution de l'équation (E) sur $]1, +\infty[$.
(b) L'ensemble $\mathcal{S}$ est-il un espace vectoriel ?
(c) Représenter en Python la fonction f sur l'intervalle $[2, 4]$.
2. On cherche une solution y de l'équation différentielle (E) vérifiant $y(e) = 3$. Sous réserve d'existence de y , utiliser la méthode d'Euler pour représenter en Python un tracé approximatif de la courbe représentative de y sur l'intervalle $[2, 4]$ en partant du point $(e; 3)$. On pourra tracer successivement une solution sur $[e, 4]$ puis une solution sur $[2, e]$. Comparer avec le graphe obtenu à la question 1.
3. Déterminer les solutions sur I de l'équation différentielle linéaire :

$$t^2 z'(t) + tz(t) = 1 \quad (\text{E}')$$

ayant pour inconnue une fonction $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I .

4. Soit y une solution de E, qui ne s'annule pas sur tout l'intervalle I . Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{y(t)}$ est solution de E'.
En déduire l'expression de y .
5. (a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des fonctions de $\mathcal{S}$ qui ne s'annulent pas sur I .
(b) A-t-on $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$?
(c) Existe-t-il une solution de E vérifiant $y(e) = 3$ et ne s'annulant pas sur I ?

Exercice sans préparation

Un codon est constitué de 3 nucléotides et a pour base azotée soit A, soit T, soit G, soit C.

1. Écrire une fonction qui prend en entrée un nucléotide et renvoie son complémentaire. On rappelle que les nucléotides complémentaires sont A-T et C-G.
2. Écrire une fonction qui prend deux brins de même taille et qui vérifie s'ils sont complémentaires.
3. Écrire une fonction qui prend deux brins de même taille et une position k et qui renvoie les deux nouveaux brins issus du phénomène de croisement en position k .

Par exemple, avec les brins 'ATTGTC' et 'CGCTGA' en position trois, on obtient 'ATTTGA' et 'CGCGTC'.

Éléments de correction—Planche 3

Exercice avec préparation

Soit $I =]1, +\infty[$, et on considère l'équation différentielle :

$$\forall t \in I, -t^2 y'(t) + ty(t) = (y(t))^2 \quad (E)$$

ayant pour inconnue une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I .

1. (a) Soit la fonction $f : t \mapsto \frac{t}{\ln(t)}$. C'est une fonction bien définie sur $I =]1, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ par quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ ne s'annulant pas sur I (le $\ln$ ne s'annule qu'en $1 \notin I$). On a :

$$\forall t \in I, f'(t) = \frac{1}{\ln(t)} + t \left(-\frac{1}{t \ln(t)^2} \right) = \frac{\ln(t) - 1}{\ln(t)^2}$$

Donc, pour $t \in I$,

$$-t^2 f'(t) + tf(t) = \frac{t^2}{\ln(t)^2} (-(\ln(t) - 1) + \ln(t)) = \frac{t^2}{\ln(t)^2} = (f(t))^2.$$

On vient donc de vérifier que f est une solution de l'équation E sur I .

- (b) Du fait de la présence de $y(t)^2$, l'ensemble $\mathcal{S}$ n'est probablement¹ pas un espace vectoriel. Soit y un élément de $\mathcal{S}$ non nul. Par exemple la fonction f exhibée précédemment. Si $\mathcal{S}$ était un SEV² de l'espace vectoriel réel de toutes les fonctions (à valeurs) réelles définies sur I , alors $2y$ serait aussi un élément de $\mathcal{S}$. On aurait donc à la fois

$$\forall t \in I, -t^2 y'(t) + ty(t) = (y(t))^2 \quad (E_1)$$

et

$$\forall t \in I, -t^2 2y'(t) + t2y(t) = (2y(t))^2. \quad (E_2)$$

En effectuant $E_2 - 2E_1$, il reste :

$$\forall t \in I, 0 = 2(y(t))^2$$

et donc y devrait être la fonction nulle, ce qui n'est pas le cas.

- (c)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f(t,C=0):
    return t/(C+np.log(t))
t = np.linspace(2,4,100)
plt.subplots()
plt.plot(t,f(t))
```

1. sauf compensation inattendue et miraculeuse ou contrainte si forte que seul le vecteur nul est solution
2. Noter le sous-entendu abusif de l'énoncé qui implique que les opérations dans $\mathcal{S}$ sont les opérations usuelles sur les fonctions réelles

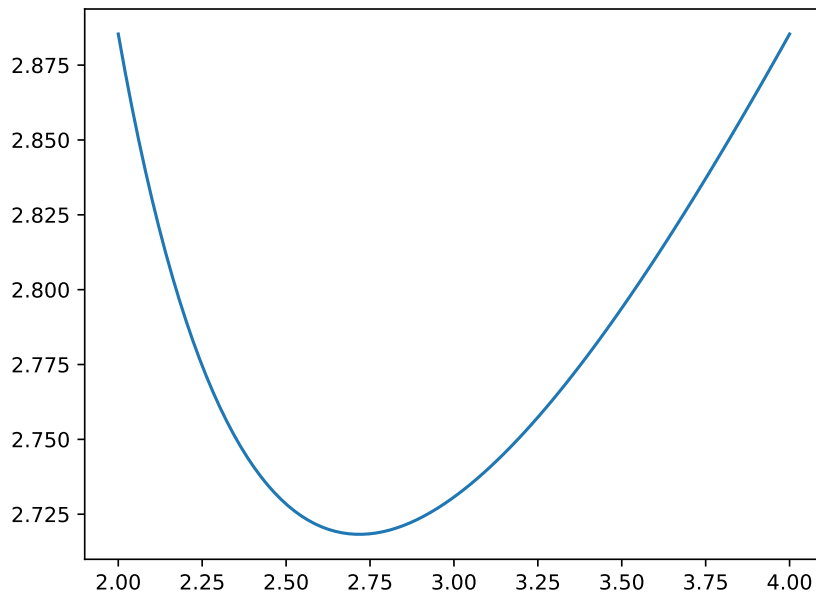


FIGURE 1 – Le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[2, 4]$.

```
2. def phi(y,t): #le second membre de  $y' = y/t - y**2/t**2 = phi(y,t)$ 
    z = y/t
    return z-z**2
def Euler(t,y0 = 3):
    y = [y0]
    for i in range(t.shape[0]-1):
        dt = t[i+1]-t[i]
        y.append( y[-1] + dt*phi(y[-1],t[i]) )
    return np.array(y)

N = 100
tp = np.linspace(np.exp(1),t.max(),N)
yp = Euler(tp,3)
tm = np.linspace(np.exp(1),t.min(),N)
ym = Euler(tm,3)
plt.subplots()
plt.plot(tp,yp)
plt.plot(tm,ym)
plt.savefig('graphe-y.pdf',format='pdf')
plt.show()
```

On constate, en comparant avec le graphe de f un comportement (décroissance/croissance) qualitativement similaire. On peut superposer les deux graphes mais cela ne nous donne guère plus de renseignement.

3. Pour déterminer les solutions sur I de l'équation différentielle linéaire :

$$t^2 z'(t) + tz(t) = 1 \quad (E')$$

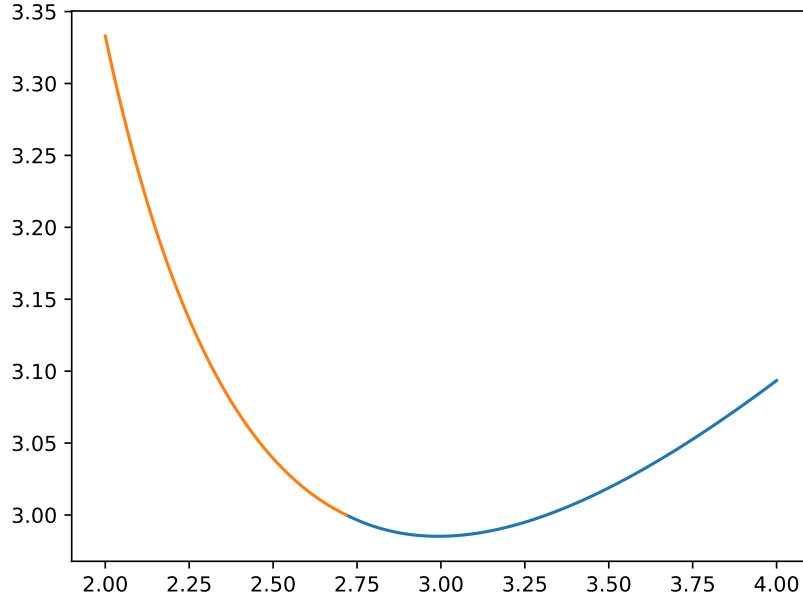


FIGURE 2 – Le graphe de la fonction y sur l'intervalle $[2, 4]$.

ayant pour inconnue une fonction $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I .

— On réécrit E' en :

$$\forall t \in I, \quad z'(t) + \frac{1}{t}z(t) = \frac{1}{t^2}. \quad (E')$$

— On résout l'équation linéaire homogène associée

$$\forall t \in I, \quad z'(t) + \frac{1}{t}z(t) = 0; \quad (E'_0)$$

z est solution de E'_0 ssi il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in I, \quad z(t) = C \exp(-\ln(t)) = \frac{C}{t} \quad (R'_0)$$

— On met en œuvre la méthode de variation de la constante, c'est à dire : on pose pour tout fonction z définie sur I , $z(t) = \frac{\lambda(t)}{t}$ où λ est une fonction $I \rightarrow \mathbb{R}$ de même régularité (dérivable) que z , on constate que

$$\forall t \in I, \quad z'(t) = -\frac{\lambda(t)}{t^2} + \frac{\lambda'(t)}{t}$$

et

$$\forall t \in I, \quad z'(t) + \frac{1}{t}z(t) = \frac{\lambda'(t)}{t}$$

et donc que z est solution si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad \frac{\lambda'(t)}{t} = \frac{1}{t^2}$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in I, \lambda'(t) = \frac{1}{t}$$

c'est-à-dire, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in I, \lambda(t) = \ln(t) + C$$

c'est-à-dire, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in I, z(t) = \frac{C + \ln(t)}{t}$$

4. Soit y une solution de E, qui ne s'annule pas sur tout l'intervalle I .

Posons $z : t \mapsto \frac{1}{y(t)}$. On alors

$$\forall t \in I, z'(t) = -\frac{y'(t)}{y(t)^2}$$

et donc

$$\forall t \in I, t^2 z'(t) + tz = -\frac{t^2 y'(t)}{y(t)^2} + t \frac{1}{y(t)} = \frac{-t^2 y'(t) + ty(t)}{y(t)^2}$$

et donc, comme y est solution de E sur I ,

$$\forall t \in I, t^2 z'(t) + tz = \frac{-t^2 y'(t) + ty(t)}{y(t)^2} = \frac{y(t)^2}{y(t)^2} = 1$$

et donc z est solution de E'.

On en déduit qu'il existe une constante C telle que

$$\forall t \in I, z(t) = \frac{C + \ln(t)}{t}$$

et donc, d'une part $\forall t \in I, C + \ln(t) \neq 0$ et d'autre part

$$\forall t \in I, y(t) = \frac{t}{C + \ln(t)}.$$

5. (a) Réciproquement, si C est une constante réelle telle que

$$\forall t \in I, \ln(t) + C \neq 0$$

(Ceci force $C \geq 0$ car $I =]1, +\infty[$, $t = e^{-C}$ ne doit pas appartenir à I) alors, en posant

$$\forall t \in I, y(t) = \frac{t}{C + \ln(t)}$$

On a

$$\forall t \in I, y'(t) = \frac{1}{C + \ln(t)} - \frac{1}{(C + \ln(t))^2} = \frac{C - 1 + \ln(t)}{(C + \ln(t))^2}$$

et

$$\forall t \in I, -t^2 y'(t) + ty(t) = \frac{t^2}{C + \ln(t)} - (C - 1 + \ln(t)) \frac{t^2}{(C + \ln(t))^2} = \frac{t^2}{(C + \ln(t))^2} = y(t)^2$$

L'ensemble $\mathcal{S}_1$ des fonctions de $\mathcal{S}$ qui ne s'annulent pas sur I est donc l'ensemble

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ y : t \in I \mapsto \frac{t}{\ln(t) + C} ; C \in [0, +\infty[\right\}$$

-
- (b) On n'a pas $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$ car la fonction nulle sur I , y_0 est solution sur I de E .
- (c) Pour trouver une solution de E vérifiant $y(e) = 3$ et ne s'annulant pas sur I , il suffit de trouver la bonne constante C et donc de résoudre $\frac{e}{\ln(e) + C} = 3$ d'inconnue $C \geq 0$. Or

$C = \frac{e}{3} - 1 < 0$ est la seule solution de cette équation sur $\mathbb{R}$ et donc il n'existe pas de solution de E vérifiant $y(e) = 3$ et ne s'annulant pas sur I .

En fait, (non demandé), il n'existe pas de solution de E vérifiant $y(e) = 3$ définie sur *tout* I .

La fonction $y : t \mapsto \frac{t}{\ln(t) + C}$ où $C = \frac{e}{3} - 1 < 0$ est définie, $\mathcal{C}^\infty$ sur $I' =]e^{-C}, +\infty[=]t_0, +\infty[$ et est la *seule* solution de l'équation différentielle sur $I' \subset I$ vérifiant $y(e) = 3$. Elle tend vers $+\infty$ en t_0^+ .

Par rapport aux calculs faits sur machine, on peut remarquer que $t_0 = e^{-C} \simeq 1.09$ et que la solution calculée/approximée tend elle aussi probablement vers $+\infty$ en t_0^+ .

Exercice sans préparation

```
1. def complementaire(nuc):
    L = [A,C,G,T]
    Lcomp = [T,G,C,A]
    for i in range(4):
        if nuc == L[i]:
            return Lcomp[i]

2. def is_comp(L1,L2):
    for i in range(len(L1)):
        if L1[i]<>complementaire(L2[i]):
            return False
    return True

3. def croisement(L1,L2,k):
    crois1=L1[0:k]+L2[k:len(L2)]
    crois2=L2[0:k]+L1[k:len(L2)]
    return crois1,crois2
```