Agro-Veto – Planche 1

Question de cours

Énoncer la formule de transfert pour une variable aléatoire réelle à densité.

Exercice avec préparation

Soit $k \in]0,4[$. On définit la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ par la formule $\forall x \in [0,1], \quad f(x) = kx(1-x)$.. On définit aussi une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en donnant $u_0 \in]0,1[$ et en posant, par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Étudier les variations de f, montrer que u est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \in \left]0, \frac{k}{4}\right]$.
2. (a) Si la suite u converge vers un certain réel ℓ, quelles sont les valeurs possibles pour ℓ ?

   (b) Déterminer, en discutant sur les valeurs de k, le signe de $f(x) - x$ lorsque $x \in \left]0, \frac{k}{4}\right]$.
3. Écrire une fonction Python `U(p, u0,k)` retournant en une liste les termes $u_0, \ldots, u_p$ déterminés par $u_0 =$ `u0` et la constante $k =$ `k`.
4. Cas $0 < k \leq 1$. Montrer que la suite u est décroissante et conclure quant à sa limite.
5. Cas $1 < k \leq 2$. Comparer $\ell = \frac{k-1}{k}$, $\frac{k}{4}$ et $\frac{1}{2}$, montrer que la suite u est monotone et conclure quant à sa limite.
6. Cas $2 < k < 3$. Comparer $\ell = \frac{k-1}{k}$, $\frac{k}{4}$ et $\frac{1}{2}$.

   (a) Soit $\ell = \frac{k-1}{k}$. Montrer : $\forall x \in]0,1[, \quad f(x) - \ell = (x-\ell)(1-kx)$.
   En déduire : $\forall x \in \left]0, \frac{2}{k}\right[\setminus \{\ell\}, \quad |f(x) - \ell| < |x - \ell|$ et vérifier que $\ell < \frac{2}{k}$.

   (b) On pose $\alpha = \frac{2}{k} - \ell$ et $J =]\ell - \alpha, \ell + \alpha[= \left]2\frac{k-2}{k}, \frac{2}{k}\right[$. Montrer que $f(J) \subset J$.

   (c) Montrer que si $u_0 \in J$, alors

      i. $\alpha_0 = |u_0 - \ell| < \alpha$ et $J_0 = [\ell - \alpha_0, \ell + \alpha_0] \subset J$

      ii. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J_0$

      iii. $\exists 0 < q < 1$, $\forall x \in J_0, \quad |f(x) - \ell| \leq q|x - \ell|$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leq q^n.|u_0 - \ell|$.
      Quelle est, dans ce cas la limite de la suite u ?

   (d) On suppose $2 < k < \frac{5}{2}$ de sorte que $\frac{k}{4} \leq \frac{2}{k}$ et $2\frac{k-2}{k} \leq \frac{1}{2}$. Montrer qu'alors la suite u a pour limite ℓ quel que soit le choix de $u_0 \in]0,1[$.
   On admet que ce résultat reste valable pour tout k, $2 < k \leq 3$.

Exercice avec préparation

7. Cas $3 < k < 4$. Comparer $\ell = \dfrac{k-1}{k}$, $\dfrac{k}{4}$ et $\dfrac{1}{2}$.

   (a) Démontrer que $|f'(0)| > 1$ et $\left|f'\left(\dfrac{k-1}{k}\right)\right| > 1$.

   (b) Soit $\ell \in \left[0, \dfrac{k}{4}\right]$ tel que $f(\ell) = \ell$ et $|f'(\ell)| > 1$.

      i. Démontrer qu'il existe un intervalle $I \subset \left]0, \dfrac{k}{4}\right[$, ouvert, centré en ℓ et un nombre réel $q > 1$ tel que
      $$\forall x \in I \cap \left[0, \frac{k}{4}\right], \quad |f(x) - \ell| \geq q.|x - \ell|$$

      ii. Cet intervalle I et le nombre q étant fixés, en supposant que u converge vers ℓ, démontrer qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, successivement

         A. $\forall n \geq n_0$, $u_n \in I$,

         B. $\forall n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \geq q^{n-n_0}|u_{n_0} - \ell|$,

         C. $\forall n \geq n_0$, $u_n = \ell$,

   (c) La suite u peut-elle converger vers 0 ?

   (d) La suite u peut-elle converger vers $\dfrac{k-1}{k}$?

Exercice sans préparation

1. Écrire une fonction qui prend en entrée une liste L d'entiers naturels et un entier k et qui renvoie la liste obtenue en supprimant tout les multiples de k (sauf k lui même) de la liste L. On rappelle que `a//b` et `a%b` donnent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
2. Un nombre entier naturel est dit **premier** s'il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

   Écrire une fonction prenant en entrée un entier naturel n et qui renvoie la liste des nombres premiers compris entre 1 et n.

Éléments de correction–Planche 1

Exercice avec préparation

1. La fonction f est polynômiale et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = k(1-2x).$$

   — Sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$, $f' > 0$ et donc f est strictement croissante sur cet intervalle.

   — Sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $f' < 0$ et donc f est strictement décroissante sur cet intervalle.

   — La fonction f admet son maximum absolu en $\frac{1}{2}$, celui-ci vaut $f(\frac{1}{2}) = \frac{k}{4}$.

   On observe que

   — $f(]0,1[) \subset \left], 0\frac{k}{4}\right]$,

   — $f(\left]0, \frac{k}{4}\right]) \subset \left]0, \frac{k}{4}\right]$,

   On a donc, comme $u_0 \in]0,1[$, $u_1 \in \left], 0\frac{k}{4}\right]$, et comme cet intervalle est stable par f, il vient que la suite u est bien définie et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \in \left]0, \frac{k}{4}\right].$$

2. (a) Si la suite u converge vers un certain nombre réel ℓ, en passant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

   à la limite, comme f est continue sur tout $\mathbb{R}$ et donc en ℓ,

$$\ell = f(\ell)$$

   Cette équation équivaut à

$$0 = \ell(k(1-\ell) - 1)$$

   dont les racines sont $\ell = 0$ et $\ell = \frac{k-1}{k}$. Ce sont là les seules valeurs possibles pour ℓ.

   (b) On a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - x = x(k - 1 - kx)$$

   et donc $f(x) - x < 0$ dans le segment ouvert $\left]0, \frac{k-1}{k}\right[$ et $f(x) - x > 0$ dans les demi-droites ouvertes complémentaires.

   Il s'agit donc de déterminer la position de 0 et $\frac{k-1}{k}$ par rapport à 0 et $\frac{k}{4}$.

   On a $\frac{k-1}{k} < \frac{k}{4}$ si et seulement si $k - 1 - \frac{1}{4}k^2 < 0$, c'est-à-dire pour $\frac{1}{4}(k-2)^2 > 0$.

— Si $k \leq 1$ alors $\dfrac{k-1}{k} \leq 0$ et donc

$$\forall x \in \left]0, \frac{k}{4}\right], \quad f(x) - x < 0$$

— Si $1 < k \leq 4$ alors $\dfrac{k-1}{k} < \dfrac{k}{4}$ et donc

$$\forall x \in \left]0, \frac{k-1}{k}\right], \quad f(x) - x > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \left]\frac{k-1}{k}, \frac{k}{4}\right], \quad f(x) - x < 0.$$

3.
```
def U(p,u0,k):
    """
    retourne les termes u_0,..u_p de la suite u en liste
    """
    u=[u0]
    #print(u0,k)
    for _ in range(p):
        u.append(k*u[-1]*(1-u[-1]))
        #print(u[-1])
    return u
```

4. Cas $0 < k \leq 1$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est contenue dans l'intervalle $I = \left]0, \dfrac{k}{4}\right]$, stable par f, et

$$\forall x \in I, \quad f(x) < x.$$

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = f(u_n) < u_n.$$

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc décroissante. Comme elle est minorée, elle converge vers une certaine limite ℓ. Comme $u_n > 0$, et au vu des seules limites ℓ possibles, on a $\ell = 0$.

5. Cas $1 < k \leq 2$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est contenue dans l'intervalle $I = \left]0, \dfrac{k}{4}\right]$, stable par f. On a :

$$\ell = \frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k} \leq \frac{k}{4} \leq \frac{1}{2}.$$

La fonction f est donc croissante sur l'intervalle I (car elle l'est sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$) et, par récurrence, on montre que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est monotone :

— Si $u_1 \leq u_2$, alors, par récurrence (rédiger l'argument),

$$\forall n \geq 1, \, u_{n+1} \leq u_n$$

car si $u_{n+1} \leq u_n$ pour un certain $n \geq 1$, alors, par croissance de f, $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \leq f(u_n) = u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc croissante.

— De manière symétrique, si $u_1 \leq u_2$, alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Dans tous les cas, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est monotone, bornée, elle est donc convergente vers $\ell = 0$ ou $\ell = \dfrac{k-1}{k}$.

— Si $u_1 \leq \dfrac{k-1}{k}$ alors $u_2 = f(u_1) \geq u_1$, la suite est croissante et la limite $\ell \geq u_1 > 0$. La limite ℓ est donc $\dfrac{k-1}{k}$.

— Si $u_1 \geq \dfrac{k-1}{k}$ alors $u_2 = f(u_1) \leq u_1$, la suite est décroissante et, par récurrence $\forall n \geq 1$, $u_n \geq \dfrac{k-1}{k}$. La limite $\ell \geq \dfrac{k-1}{k} > 0$. La limite ℓ est donc $\dfrac{k-1}{k}$.

6. Cas $2 < k < 3$. On a $\dfrac{1}{2} < \ell = \dfrac{k-1}{k} = 1 - \dfrac{1}{k} \leq \dfrac{k}{4}$.

(a) Soit $\ell = \dfrac{k-1}{k}$. On a

$$\forall x \in]0,1[, \quad f(x) - \ell = (x-\ell)(1-kx)$$

car $f(x) - \ell$ est un trinôme de terme dominant $-kx^2$, s'annulant en ℓ et de terme constant $-\ell$.

Donc, si $x \in \left]0, \dfrac{2}{k}\right[\setminus \{\ell\}$ alors $-1 < 1 - kx < 1$ et $|1-kx| < 1$ et donc

$$|f(x) - \ell| < |x - \ell|.$$

Par ailleurs $\ell - \dfrac{2}{k} = (k-1)/k - 2/k = (k-3)/k < 0$ et donc $\ell < \dfrac{2}{k}$.

(b) On pose $\alpha = \dfrac{2}{k} - \ell$,

$$J =]\ell - \alpha, \ell + \alpha[= \left[2\frac{k-2}{k}, \frac{2}{k}\right].$$

On a

$$y \in J \Longleftrightarrow |y - \ell| < \alpha.$$

Si $x \in J$, on a $x \in \left]0, \dfrac{2}{k}\right[$ et donc

$$|f(x) - \ell| \leq |x - \ell| < \alpha$$

et donc $f(x) \in J$, ce qui montre que $f(J) \subset J$.

(c) Si $u_0 \in J$, alors

i. $\alpha_0 = |u_0 - \ell| < \alpha$ et $J_0 = [\ell - \alpha_0, \ell + \alpha_0] \subset J$ (c'est évident)

ii. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J_0$, par le même argument qu'en 6.(b).

iii. On a, pour tout x,

$$|f(x) - \ell| = |x - \ell||1 - kx|$$

et donc $x \in J_0$, comme $1 - kx$ est une fonction affine strictement décroissante, on a

$$1 - kx \geq 1 - k(\ell + \alpha_0) > 1 - k(\ell + \alpha) = -1$$

et

$$1 - kx \leq 1 - k(\ell - \alpha_0) < 1 - k(\ell - \alpha) = 1 - k(2\frac{k-2}{k}) = 1 - 2k + 4 = 5 - 2k < 5 - 4 = 1$$

et donc en prenant $q = \max(|1 - k(\ell + \alpha_0)|, |1 + k(\ell + \alpha_0)|)$, on a $0 < q < 1$ et

$$\forall x \in J_0, |f(x) - \ell| \leq q|x - \ell|$$

ceci implique que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leq q|u_n - \ell|$$

et par une simple récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leq q^n |u_0 - \ell|$$

Comme $q^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, la limite de la suite u est donc 0, par le théorème des gendarmes.

(d) On suppose $2 < k < \frac{5}{2}$ de sorte que $\frac{k}{4} < \frac{2}{k}$ et $2\frac{k-2}{k} \leq \frac{1}{2}$.

Soit $u_0 \in]0, 1[$, on alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left]0, \frac{k}{4}\right]$. Pour montrer que u converge vers ℓ, il suffit de montrer qu'il existe un certain rang n_0 tel que $u_{n_0} \in J_0$. Si tel n'est pas le cas, comme pour tout $n \geq 1$, $u_n < \frac{2}{k}$, on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell - \alpha = 2\frac{k-2}{k} \leq \frac{1}{2}$$

Comme f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, la suite u est monotone croissante (argument déjà vu en 4.), la suite u est alors croissante, majorée, elle converge vers ℓ : ce qui est impossible car $\frac{1}{2} < \ell$.

Donc, il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} \in J_0$, par stabilité de J_0 par f,

$$\forall n \geq n_0,\ u_n \in J_0$$

et, par ce qui a été fait en 6.(c), la suite u converge vers ℓ.

On admet que ce résultat reste valable pour tout k, $2 < k \leq 3$.

7. Cas $3 < k < 4$. On a toujours $\frac{1}{2} \leq \ell = \frac{k-1}{k} \leq \frac{k}{4}$.

(a) On a, pour tout x, $f'(x) = k.(1 - 2x)$ et donc $|f'(0)| = k > 1$ et $\left|f'\left(\frac{k-1}{k}\right)\right| = |k - 2(k-1)| = |2 - k| > 1$.

(b) Soit $\ell \in \left[0, \frac{k}{4}\right]$ tel que $f(\ell) = \ell$ et $|f'(\ell)| > 1$.

i. Soit $q_0 = |f'(\ell)| > 1$ et $q = \frac{1}{2}(1 + q_0)$. On a $q_0 > q > 1$. Par continuité de $|f'|$ en ℓ, il existe un intervalle $I \subset \left]0, \frac{k}{4}\right[$, ouvert, centré en ℓ tel que

$$\forall x \in I,\ |f'(x)| \geq q.$$

Soit $x \in I$, $x \neq \ell$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f entre x et ℓ, on obtient l'existence de c, entre x et ℓ, tel que

$$f(x) - f(\ell) = f'(c)(x - \ell)$$

Comme x, $\ell \in I$, un intervalle, $c \in I$ et $|f'(c)| \geq q$ et donc

$$|f(x) - f(\ell)| = |f'(c)||x - \ell| \geq q|x - \ell|$$

Finalement, comme $f(\ell) = \ell$,

$$\forall x \in I \cap \left[0, \frac{k}{4}\right], \quad |f(x) - \ell| \geq q|x - \ell|$$

ii. Cet intervalle I et le nombre q étant fixés, en supposant que u converge vers ℓ, alors, par définition de la limite,il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \geq n_0$, $u_n \in I$. Il vient ensuite, par une simple récurrence basée sur l'inégalité précédente
(on a $|u_{n+1} - \ell| \geq q|u_n - \ell|$ pour $n \geq n_0$) que

$$\forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| \geq q^{n-n_0}|u_{n_0} - \ell|$$

Enfin, en passant cette inégalité à la limite, comme $|q| > 1$, si $|u_{n_0} - \ell| \neq 0$, on obtient une contradiction car $|u_n - \ell| \to +\infty$. Ceci est valable pour tout n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $u_{n_0} \in I$, on a donc $\forall n \geq n_0$, $u_n = \ell$.

(c) Si la suite u converge vers 0, comme $f(0) = 0$ et $|f'(0)| > 1$, alors, par la question précédente, il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} = 0$. Comme, partant de $u_0 \in]0, 1[$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, ceci est impossible et la suite u ne peut converger vers 0.

(d) Si la suite u converge vers $\dfrac{k-1}{k}$, par le même argument que précédemment, il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} = \dfrac{k-1}{k}$. Comme $f(x) = \dfrac{k-1}{k} \Rightarrow x = \dfrac{k-1}{k}$ ou $x = \dfrac{1}{k}$ (par 6.(a)), cela signifie, si $n_0 \geq 1$, que $u_{n_0-1} = \dfrac{k-1}{k}$ ou $u_{n_0-1} = \dfrac{1}{k}$. Partant de $u_0 = \dfrac{k-1}{k}$ ou de $u_0 = \dfrac{1}{k}$, la suite u converge vers $\dfrac{k-1}{k}$. Il y a d'autres points de départ menant à cette limite, mais, pour la plupart des points u_0, la suite u ne peut avoir de limite.

Exercice sans préparation

1. ```
   def q1(L,k):
       M = []
       for elt in L :
           if elt%k != 0 or elt == k:
               M.append(elt)
       return M
   ```

2. ```
   def crible(n):
       L = range(1,n)
       for k in range(2,n):
           L = q1(L,k)
       return L
   ```