

Question de cours

On considère deux fonctions f et g définies au voisinage de $+\infty$ et ne s'annulant pas. Que signifie « f est équivalente à g en $+\infty$ » ?

Exercice avec préparation

Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose

$$S_1 = a + b + c, \quad S_2 = d + e + f, \quad S_3 = g + h + i, \quad S_4 = a + d + g,$$

$$S_5 = b + e + h, \quad S_6 = c + f + i, \quad S_7 = a + e + i, \quad S_8 = c + e + g.$$

Les matrices M vérifiant $S_1 = \dots = S_8$ sont dites magiques.

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices magiques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $S_7 = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^8 \\ M &\longmapsto (S_1, \dots, S_8) \end{aligned}$$

- (a) Écrire en langage Python une fonction prenant en entrée une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et renvoyant **True** si elle est magique, **False** sinon.
- (b) Représenter dans les bases canoniques respectives de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^8$ la matrice de l'application f .

(c) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que la famille (A, B) est une base du sous-espace vectoriel $\mathcal{M} \cap \mathcal{T}$.

- (d) Montrer que la matrice A est diagonalisable et admet pour valeur propre 0.

3. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer que toute matrice magique M' peut s'écrire sous la forme $M + \lambda J$, où M est une matrice de $\mathcal{M} \cap \mathcal{T}$ et où λ est un réel dont on précisera la valeur.
- (b) En déduire une base de $\mathcal{M}$.

4. Écrire un programme en langage Python renvoyant le nombre de matrices magiques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à coefficients tous entiers compris entre 1 et 9.

Exercice sans préparation

1. Écrire une fonction qui prend en entrée une chaîne de caractère et qui renvoie la chaîne caractère obtenue en enlevant sa première et dernière lettre.
2. On rappelle qu'un mot est un palindrome s'il se lit aussi bien de gauche à droite que de droite à gauche, par exemple le mot KAYAK ou le prénom ANNA. On souhaite écrire une fonction **récursive** `est_palindrome(m)` qui prend en argument une chaîne de caractères `m` et qui renvoie `True` si `m` est un palindrome et `False` sinon.

Éléments de correction–Planche 1

Exercice avec préparation

1. Pour tout $i \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$, notons

$$\begin{aligned} f_i : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M &\longmapsto \ll S_i \text{ calculé pour } M \gg \end{aligned}.$$

et, pour $i \in \llbracket 1, 7 \rrbracket$, g_i définie par $\forall M, g_i(M) = S_{i+1}(M) - S_i(M)$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$, l'application f_i est linéaire : on vérifie en effet facilement

$$\forall (M, N) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f_i(\lambda M + N) = \lambda f_i(M) + f_i(N).$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, 7 \rrbracket$, l'application g_i est linéaire (c'est une combinaison linéaire d'applications linéaires).

Par définition, l'ensemble $\mathcal{M}$ peut s'écrire :

$$\mathcal{M} = \bigcap_{i=1}^7 \ker(g_i).$$

En tant qu'intersections de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble

$\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. (a) La fonction Python suivante permet de tester si une matrice est magique ou pas ; observons qu'il ne serait pas difficile d'étendre cette vérification au cas des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'entier n n'étant plus nécessairement égal à 3 :

```
def test_magique(M):  
    '''en entrée : une matrice carrée d'ordre 3  
    définie comme une liste de listes ;  
    en sortie : True si cette matrice est magique,  
    False sinon'''  
    trace = sum(M[i][i] for i in range(3))  
    for i in range(3):  
        if sum(M[i][j] for j in range(3)) != trace:  
            return False  
        if sum(M[j][i] for j in range(3)) != trace:  
            return False  
    if sum(M[2-i][i] for i in range(3)) != trace:  
        return False  
    return True
```

- (b) Notons, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à la ligne i et à la colonne j qui vaut 1.

Notons $\mathcal{B}$ la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$; il s'agit de sa base canonique.

Notons $\mathcal{B}_c = (u_1, \dots, u_8)$ la base canonique de $\mathbb{R}^8$.

La matrice de l'application linéaire f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_c$ est :

$$\text{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{8,9}(\mathbb{R})$$

(c) On peut noter que $\mathcal{M} \cap \mathcal{T} = \bigcap_{i=1}^8 \ker(f_i) = \ker(f)$.

— **Première méthode.** En résolvant ce système d'équation cartésiennes, on obtient que les matrices de $\mathcal{M} \cap \mathcal{T}$ sont exactement les matrices s'écrivant

$$M = \begin{pmatrix} a & -a-c & c \\ -a-g & e & a+g-e \\ g & a+c-e & -a-c+e-g \end{pmatrix},$$

où a, c, e, g sont 4 réels vérifiant $2e - c - g = 0$ et $c + e + g = 0$, c'est-à-dire $e = 0$ et $c = -g$. Autrement dit, les matrices de $\mathcal{M} \cap \mathcal{T}$ sont exactement les matrices s'écrivant

$$M = \begin{pmatrix} a & -a+g & -g \\ -a-g & 0 & a+g \\ g & a-g & -a \end{pmatrix} = aA + gB.$$

Ainsi, la famille (A, B) est génératrice du sous-espace vectoriel $\mathcal{M} \cap \mathcal{T}$.

Les matrices A et B n'étant pas colinéaires, elles forment une famille libre. Ainsi,

la famille (A, B) est une base du sous-espace vectoriel $\mathcal{M} \cap \mathcal{T}$.

— **Deuxième méthode** (sans « résolution »).

i. Le rang de la matrice $\text{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}_c)$ est 7 (après échelonnement une ligne de 0 apparaît ou calcul en Python).

Par le théorème du rang, la dimension de son noyau est donc $9 - 7 = 2$. C'est aussi la dimension du noyau de f et donc la dimension de $\mathcal{M} \cap \mathcal{T}$.

ii. On vérifie aisément que les deux matrices A et B sont dans $\mathcal{M} \cap \mathcal{T}$. Elles forment une famille libre (les 2 ne sont pas colinéaires) et donc

la famille (A, B) est une base du sous-espace vectoriel $\mathcal{M} \cap \mathcal{T}$ de dimension 2.

(d) La matrice A est symétrique à coefficients réels donc est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

La somme des trois colonnes de A est nulle, d'où $\text{rg}(A) < 3$. On en déduit que

0 est valeur propre de A .

Remarque. Le fait que la somme des trois colonnes soit nulle montre aussi que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.

3. (a) Soit $M' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a vu que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel qui contient la matrice J . On en déduit l'équivalence suivante :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad M' \in \mathcal{M} \iff M' - \lambda J \in \mathcal{M}.$$

Plus précisément, pour toute matrice $M' \in \mathcal{M}$, par linéarité de l'application f_7

$$f_7(M' - \lambda J) = f_7(M') - \lambda f_7(J) = f_7(M') - 3\lambda.$$

Ainsi, la matrice $M' - \lambda J$ appartient à $\mathcal{T}$ si et seulement si $\lambda = \frac{\text{tr}(M')}{3}$.

On a établi l'équivalence :

$$M' \in \mathcal{M} \iff M' - \frac{\text{tr}(M')}{3}J \in \mathcal{M} \cap \mathcal{T}.$$

Ainsi,

toute matrice magique M' peut s'écrire sous la forme $M' = M + \frac{\text{tr}(M')}{3}J$, où M est une matrice de $\mathcal{M} \cap \mathcal{T}$.
--

- (b) On déduit du résultat de la question précédente :

$$\mathcal{M} = \{aA + bB + \lambda J, \quad (a, b, \lambda) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(A, B, J).$$

(En toute rigueur, le résultat de la question précédente fournit l'inclusion $\subset$, et l'autre inclusion découle du fait que chacune des matrices A , B et J appartient au sous-espace vectoriel $\mathcal{M}$.)

La famille (A, B, J) est donc génératrice du sous-espace vectoriel $\mathcal{M}$. Vérifions que cette famille est libre. Soit $(a, b, \lambda) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$aA + bB + \lambda J = 0.$$

Appliquons l'application linéaire f_7 membre à membre :

$$a \times 0 + b \times 0 + 3\lambda = 0$$

d'où $\lambda = 0$. Il en résulte :

$$aA + bB = 0.$$

Comme les matrices A et B ne sont pas colinéaires, on obtient $a = b = 0$.

Ainsi, la famille (A, B, J) est libre. Conclusion :

la famille (A, B, J) est une base du sous-espace vectoriel $\mathcal{M} \cap \mathcal{T}$.

On en déduit en particulier que ce sous-espace vectoriel est de dimension 3.

4. D'après le résultat de la question précédente, il est légitime de chercher les matrices magiques à coefficients tous entiers compris entre 1 et 9 sous la forme $aA + bB + \lambda J$, où a, b, λ sont trois réels vérifiant

- $\lambda \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$ (en examinant le coefficient situé en ligne 2 et colonne 2)
- $a + \lambda \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$ (en examinant le coefficient situé en ligne 1 et colonne 1)
- $-a + \lambda \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$ (en examinant le coefficient situé en ligne 3 et colonne 3)
- $b + \lambda \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$ (en examinant le coefficient situé en ligne 3 et colonne 1)

- $-b + \lambda \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$ (en examinant le coefficient situé en ligne 1 et colonne 3)

Il suffit donc d'examiner les matrices pour lesquelles les entiers a, b, λ vérifient :

$$1 \leq \lambda \leq 9, \quad \min(1-\lambda, \lambda-9) \leq a \leq \min(9-\lambda, \lambda-1), \quad \min(1-\lambda, \lambda-9) \leq b \leq \min(9-\lambda, \lambda-1)$$

```
def matrice_magique(a,b,Lambda):
    A = [[1,-1,0],[-1,0,1],[0,1,-1]]
    B = [[0,1,-1],[-1,0,1],[1,-1,0]]
    M = [[0,0,0],[0,0,0],[0,0,0]]
    for i in range(3):
        for j in range(3):
            M[i][j] = a*A[i][j] + b*B[i][j] + Lambda
    return M

def compteur_matrices_magiques():
    compteur = 0
    for Lambda in range(1,10):
        mini = max(1-Lambda,Lambda-9)
        maxi = min(9-Lambda,Lambda-1)
        for a in range(mini,maxi+1):
            for b in range(mini,maxi+1):
                M = matrice_magique(a,b,Lambda)
                cond1 = (1<= M[0][1] <= 9) and (1<= M[1][0] <= 9)
                cond2 = (1<= M[0][2] <= 9) and (1<= M[2][0] <= 9)
                compteur += cond1 and cond2 and test_magique(M)
    return compteur
```

Python trouve 165 matrices magiques dont les coefficients sont tous compris entre 1 et 9.

Exercice sans préparation

```
1. def q1(chaine):
    n = len(chaine)
    L = ''
    for k in range(1,n-1):
        L=L+chaine[k]
    return L

2. def palindrome(chaine):
    n =len(chaine)
    if n<2:
        return True
    else:
        if chaine[n-1]==chaine[0]:
            return palindrome(q1(chaine))
        else:
            return False
```