Agro-Veto – Planche 3

Question de cours

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une application linéaire soit injective.

Exercice avec préparation

Soit $p_\theta(a,b)$ le projeté orthogonal de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sur la droite vectorielle engendrée par $u_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. On note $\|(a,b)\| = \sqrt{a^2+b^2}$.

1. (a) Donner la formule de $p_\theta(a,b)$ en fonction de a, b et θ. Montrer que :

$$\|p_\theta(a,b)\| = |a\cos\theta + b\sin\theta|$$

   (b) Montrer que la matrice de p_θ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

   (c) Écrire une fonction Python `Y(a,b)` donnant la norme de $p_\theta(a,b)$ en fonction de a,b où θ est tiré au hasard (uniforme) entre $-\pi$ et π.
   Appliquer cette fonction avec $a = 3$ et $b = 4$ au moins 10000 fois et donner la moyenne de la norme de $p_\theta(a,b)$ multiplié par π.
   On utilisera la fonction `random.rand` de la bibliothèque `numpy` qui tire un nombre aléatoire uniforme entre 0 et 1.

2. On considère une variable aléatoire X réelle à densité. On note Y la norme du projeté orthogonal de (a,b) sur la droite vectorielle engendrée par $u_X = (\cos(X), \sin(X))$.
   (a) Montrer qu'il existe des réels r et α positifs, dépendant uniquement de a et b tels que :

$$Y = r|\cos(X-\alpha)|$$

   (b) Montrer que Y admet une espérance et une variance. Montrer que

$$0 \leq \mathbb{E}(Y) \leq \sqrt{a^2+b^2}$$

   (c) Calculer l'espérance de Y si X suit une loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$.
   (d) Calculer la variance de Y si X suit une loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$.

Éléments de correction–Planche 3

Exercice avec préparation

1. (a) Le vecteur u_θ est unitaire et donc la projection p_θ s'exprime par
$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad p_\theta(x) = (x, u_\theta)u_\theta$$
On a donc, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
$$p_\theta(a, b) = (a\cos\theta + b\sin\theta)u_\theta = (a\cos^2\theta + b\sin\theta\cos\theta, a\cos\theta\sin\theta + b.\sin^2\theta)$$
Comme $\|u_\theta\| = 1$, on a donc
$$\|p_\theta(a, b)\| = |\cos\theta + b.\sin\theta|$$
(b) Soit $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. On a :
$$p_\theta(e_1) = (\cos^2\theta, \cos\theta\sin\theta) = \cos^2\theta e_1 + \cos\theta\sin\theta e_2$$
$$p_\theta(e_2) = (\sin\theta\cos\theta, \sin^2\theta) = \sin\theta\cos\theta e_1 + \sin^2\theta e_2$$
et donc, par construction, la matrice de p_θ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ s'écrit :
$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$
(c)
```
import numpy as np

def Y(a,b):
    theta=np.pi*(-1+2*np.random.rand())
    return np.abs(a*np.cos(theta)+b*np.sin(theta))

#Calcul demandé
NS=10000
E=0
for s in range(NS):
    E+=Y(3,4)
E=E/NS*np.pi
print("E=",E)
```
En appliquant cette fonction avec $a = 3$ et $b = 4$ un grand nombre de fois, la moyenne multiplié par π est de l'ordre de 10.

2. On considère une variable aléatoire X réelle à densité. On note Y la norme du projeté orthogonal de (a, b) sur la droite vectorielle engendrée par $u_X = (\cos(X), \sin(X))$.
(a) On a
$$Y = |a\cos X + b\sin X|$$
Mettons en facteur $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et introduisons α, un nombre tel que
$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$
On obtient donc
$$Y = r|\cos\alpha\cos X + \sin\alpha\sin X| = r|\cos(X - \alpha)|.$$

(b) La v.a. Y admet une espérance et une variance car $0 \leq Y \leq r$ et $0 \leq |Y^2| \leq r^2$. Comme $\mathbb{E}(r) = r, \mathbb{E}(r^2) = r^2$, on obtient par croissance :

$$0 \leq \mathbb{E}(Y) \leq r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(c) Si X suit une loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$, l'espérance de Y est l'intégrale

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r|\cos(x-\alpha)|\ dx.$$

L'intégrande de cette intégrale est 2π-périodique, l'intervalle d'intégration est de longueur 2π, on a donc (intégration sur un autre intervalle de même longueur)

$$\mathbb{E}(Y) = r\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} |\cos(x)|\ dx = r\frac{2}{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos(x)\ dx = r\frac{2}{2\pi} \left[\sin(x)\right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{2r}{\pi}$$

Dans le cas $a = 3$, $b = 4$, on a donc $\mathbb{E}(Y)\pi = 10$, ce qui est cohérent avec la simulation informatique.

(d) Si X suit une loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$, l'espérance de Y^2 est l'intégrale

$$\mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r^2|\cos(x-\alpha)|^2\ dx$$

L'intégrande de cette intégrale est 2π-périodique, l'intervalle d'intégration est de longueur 2π, on a donc (intégration sur un autre intervalle de même longueur)

$$\mathbb{E}(Y^2) = r^2\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \cos(x)^2\ dx = r^2\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos(2x))\ dx = \frac{r^2}{2}$$

Par Koenig–Huyghens, on a

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{r^2}{2} - \frac{4r^2}{\pi^2} = \frac{r^2}{2}\left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right).$$