Agro-Veto – Planche 4

Question de cours

Si α est un réel quelconque, déterminer sur $]0,+\infty[$ l'expression d'une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$.

Exercice avec préparation

Une compagnie fait passer des entretiens à n candidats. On suppose que la compétence de chaque candidat est quantifiée par une variable aléatoire X_i de loi uniforme sur $[0;1]$, d'autant plus élevée que le candidat est compétent. De plus, on suppose que les variables $(X_1,\dots,X_n)$ sont mutuellement indépendantes.
Après chaque entretien, soit la compagnie embauche le candidat, soit elle passe au suivant, sans possibilité de revenir sur ses pas. La compagnie cherche à élaborer une stratégie qui lui permettrait de maximiser l'espérance de la compétence du candidat qu'elle choisira. Pour ce faire, elle décide de fixer un seuil $s \in [0;1]$. Si, parmi les $n-1$ premiers candidats, aucun ne dépasse le seuil, la compagnie embauchera le dernier candidat. Sinon, elle choisira le premier candidat qui dépasse le seuil.
Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on note A_k l'évènement : « $\forall i \in [\![1, k-1]\!]$, $X_i < s$, et $X_k \geqslant s$ », et B l'évènement : « $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $X_k < s$ ».
On définit par conséquent la variable aléatoire $Z_{n,s}$, compétence du candidat retenu, comme suit :

$$Z_{n,s} = \begin{cases} X_n & \text{si } B \text{ est réalisé,} \\ X_k & \text{si } A_k \text{ est réalisé } (1 \leqslant k \leqslant n-1) \end{cases}.$$

1. (a) Écrire un programme Python qui prend en argument un réel $s \in [0;1]$, un entier naturel non nul n, et retourne une réalisation de $Z_{n,s}$.
   (b) En déduire un programme qui retourne une valeur approchée de la compétence moyenne du candidat recruté via ce protocole.
2. Calculer $\mathbb{E}(Z_{n,0})$ et $\mathbb{E}(Z_{n,1})$.
3. Montrer que, pour tout $t \in [0;1]$, on a : $\mathbb{P}\left(B \cap [Z_{n,s} \leqslant t]\right) = s^{n-1}t$.
   Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $0 < s < 1$.
4. Soit $t \in [0;1]$. Montrer : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathbb{P}\left(A_k \cap [Z_{n,s} \leqslant t]\right) = \begin{cases} (t-s)s^{k-1} & \text{si } t \geqslant s \\ 0 & \text{si } t < s \end{cases}$.
5. En déduire la valeur de la probabilité $\mathbb{P}(Z_{n,s} \leqslant t)$ en fonction de $t \in [0;1]$.
6. Montrer que $Z_{n,s}$ est une variable à densité, et en donner une densité.
7. En déduire que : $\mathbb{E}(Z_{n,s}) = \dfrac{1}{2}(1 + s - s^n)$.
8. Déterminer le seuil s_n^* qui maximise la compétence moyenne du candidat embauché en fonction de n.
9. À l'aide de la fonction programmée en 1.(b), tracer sur un graphique l'évolution de la valeur de $\mathbb{E}(Z_{n,s})$ en fonction de s pour $n = 5, 10, 50$, et vérifier les conclusions de la question précédente dans ces cas.

Éléments de correction–Planche 4

Exercice avec préparation

1. (a)
   (b) On propose le code :

```python
import random as rd

def embauche(n,s):
    i = 0
    x = 0
    while i<n and x < s:
        i+=1
        x = rd.random()
    return x

def competence(n,s):
    N = 1000
    comp = 0
    for _ in range(N):
        comp += embauche(n,s)/N
    return comp
```

2. Si le seuil est fixé à 0, alors le premier candidat sera presque sûrement embauché. Ainsi,
$$\mathbb{E}(Z_{n,0}) = \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{2}.$$
Si le seuil est fixé à 1, alors presque sûrement aucun candidat n'aura la compétence nécessaire, et donc le dernier candidat sera embauché. Ainsi
$$\mathbb{E}(Z_{n,1}) = \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{2}.$$

3. Si $s = 0$, alors la probabilité de B est nulle, et donc la probabilité cherchée est nulle aussi, et l'égalité est vraie.
Si $s > 0$, alors $\mathbb{P}(B) \neq 0$, et par la formule des probabilités composées,
$$\mathbb{P}(B \cap [Z_{n,s} \leqslant t]) = \mathbb{P}_B(Z_{n,s} \leqslant t)\mathbb{P}(B).$$
Sachant que B est réalisé, et par indépendance de $[X_n \leq t]$ et B (lemme des coalitions, B est défini à partir de $X_1, ..., X_{n-1}$, indépendant de X_n) on a
$$\mathbb{P}_B(Z_{n,s} \leqslant t) = \mathbb{P}_B(X_n \leqslant t) = \mathbb{P}(X_n \leqslant t) = t.$$
Ensuite, pour que B soit réalisé, il faut avoir $X_i < s$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$. Chacun des ces événements est de probabilité s, et par indépendance, on a donc
$$\mathbb{P}(B) = s^{n-1}.$$
Finalement, la probabilité cherchée vaut bien $s^{n-1}t$.
On peut aussi raisonner sur le mode de la question suivante, en écrivant que :
$$\mathbb{P}(B\cap[Z_{n,s} \leqslant t]) = \mathbb{P}(B\cap[X_n \leqslant t]) = \mathbb{P}([X_1 < s]\cap[X_2 < s]\cap\cdots\cap[X_{n-1} < s]\cap[X_n \leqslant t]) = s^{n-1}.t$$

4. On a par indépendance des candidats

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_k \cap [Z_{n,s} \leqslant t]) &= \mathbb{P}(A_k \cap [X_k \leqslant t]) \\ &= \mathbb{P}([X_1 < s] \cap [X_2 < s] \cap \cdots \cap [X_{k-1} < s] \cap [s \leqslant X_k \leqslant t]) \\ &= \begin{cases} s^{k-1}(t-s) & \text{si } t < s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

5. Notons que pour $t < 0$, $\mathbb{P}(Z_{n,s} \leqslant t) = 0$ alors que pour $t > 1$, $\mathbb{P}(Z_{n,s} \leqslant t) = 1$.
   Soit $t \in]0,1[$. On peut appliquer la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements incompatibles $\{A_1, \ldots, A_{n-1}, B\}$.
   — Si $t \geqslant s$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_{n,s} \leqslant t) &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_K \cap [Z_{n,s} \leqslant t]) + \mathbb{P}(B \cap [Z_{n,s} \leqslant t]) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} s^{k-1}(t-s) + s^{n-1}t \\ &= (t-s)\frac{1-s^{n-1}}{1-s} + ts^{n-1}\end{aligned}$$

   — Si $t < s$, la même formule donne

$$\mathbb{P}(Z_{n,s} \leqslant t) = ts^{n-1}.$$

6. Ainsi, la fonction de répartition de $Z_{n,s}$ est continue sur *tout* $\mathbb{R}$ (on vérifie facilement la continuité en s, 0 e 1), de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en s 0 ou 1, croissante.
   Ainsi, $Z_{n,s}$ est une variable à densité, de densité obtenue par dérivation (sauf en s, 0, 1)

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1-s^n}{1-s} & \text{si } s \leqslant t \leqslant 1 \\ s^{n-1} & \text{si } 0 \leqslant t < s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

7. On peut donc calculer l'espérance de $Z_{n,s}$, la densité étant continue par morceaux sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_{n,s}) &= \int_0^s tf(t)\ dt + \int_s^1 tf(t)\ dt \\ &= s^{n-1}\frac{1}{2}s^2 + \frac{1-s^n}{1-s}\frac{1}{2}(1-s^2) \\ &= \frac{1}{2}s^{n+1} + \frac{1}{2}(1-s^n)(1+s) \\ &= \frac{1}{2}\left(1-s^n+s\right)\end{aligned}$$

8. Soit $\varphi :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall s \in]0,1[,\ \varphi(s) = \frac{1}{2}\left(1-s^n+s\right).$$

Alors φ est dérivable, et pour tout $s \in]0,1[$,

$$\varphi'(s) = \frac{1}{2}\left(1 - ns^{n-1}\right).$$

La fonction φ est donc croissante sur $\left]0, \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right]$ et décroissante sur $\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}, 1\right[$.

Elle admet donc un maximum en $s_n^* = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$, qui vaut

$$\varphi\left(s_n^*\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right).$$

9. On propose le script suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
for n in [5,10,50]:
    N=100
    s = np.linspace(0,1,N+2)
    s = s[1:-1]
    y= []
    for val in s:
        y.append(competence(n,val))
    plt.plot(s,y)
    xs = (1/n)**(1/(n-1))
    ys = .5*(1+xs-xs**n)
    plt.plot([xs],[ys],marker='o')
    plt.show()
```