Agro-Veto – Planche 5

Question de cours

Énoncer la formule des probabilités totales.

Exercice avec préparation

On s'intéresse à une population de saumons et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, y_n le nombre de saumons de l'année n.
Selon un modèle d'évolution de la population, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} = y_n e^{r\left(1-\frac{y_n}{p}\right)}$
où p représente la capacité limite du milieu et r est le taux de croissance intrinsèque de la population ($r > 0$).

1. Montrer qu'en posant $b = \dfrac{r}{p}$, $\alpha = e^r$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n = by_n$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie alors la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \alpha x_n e^{-x_n}$.
   Quel est le comportement de (x_n) si $x_0 = 0$? Par la suite, on suppose que $x_0 > 0$.
2. Montrer rapidement que (x_n) prend des valeurs strictement positives.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction $f_\alpha : x \mapsto \alpha x e^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$.
4. Déterminer les solutions de l'équation $f_\alpha(x) = x$ sur $\mathbb{R}_+$ selon la valeur de α.
5. (a) Écrire une fonction en Python qui prend en arguments deux réels x_0 et α et qui représente les termes x_k pour k variant entre 0 et 200 . On fera apparaitre les points (k, x_k) pour k pair en bleu et ceux pour k impair en rouge.
   On rajoutera donc l'option `color='blue'` ou `color='red'` pour choisir la couleur du graphe.
   (b) Tester votre programme dans le cas où $x_0 = 0.5$. Quel semble être le comportement de la suite pour $\alpha = 4$? Observer le comportement chaotique lorsque $\alpha = 15$.
6. On suppose que $\alpha \in]e, e^2[$.
   (a) On introduit la fonction g_α où $g_\alpha : x \mapsto f_\alpha(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$. Étudier le signe de g_α sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer qu'il existe un réel $M \in [0, 1[$ tel que pour tout réel $x \in]1, +\infty[$, $|f'_\alpha(x)| \leqslant M$.
   (c) Montrer que l'équation $f_\alpha(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}_+$. On notera λ_α la solution dans $[0, 1[$ et μ_α celle dans $]1, +\infty[$.
   (d) On souhaite montrer qu'il existe un rang n_0 tel que $x_{n_0} \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$.
   On procède par l'absurde en supposant que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [0, \lambda_\alpha[\cup]\mu_\alpha, +\infty[$.
   Montrer que pour tout entier naturel n, $x_{n+1} \in [0, \lambda_\alpha]$, puis que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et convergente. En déduire une contradiction et conclure.
   (e) On admet que $f_\alpha\left(\alpha e^{-1}\right) > 1$. Montrer que pour tout $x \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$, $f_\alpha(x) \in [1, \mu_\alpha]$.
   (f) Soit un entier n_0 tel que $x_{n_0} \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$.
   Montrer que $x_{n_0+1} \in [1, \mu_\alpha]$, puis que pour $n \geqslant n_0 + 1$, $|x_{n+1} - \ln(\alpha)| \leqslant M\, |x_n - \ln(\alpha)|$.
   (g) En déduire que (x_n) converge et préciser sa limite.

Éléments de correction–Planche 5

Exercice avec préparation

1. On pose $b = \dfrac{r}{p}$, $\alpha = e^r$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n = by_n$.
   On sait que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} = y_n e^{r\left(1-\frac{y_n}{p}\right)}$$
   et donc, en multipliant par b, en remarquant que $\dfrac{ry_n}{p} = by_n = x_n$, on a, pour $n \in \mathbb{N}$,
   $$x_{n+1} = x_n e^{r-x_n} = \alpha x_n e^{-x_n}$$
   Si $x_0 = 0$, clairement, par récurrence :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = 0.$$
   On suppose que $x_0 > 0$.
2. Posons $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = \alpha x e^{-x}$$
   L'intervalle $]0, +\infty[$ est clairement stable par la fonction f_α : si $x > 0$, $f_\alpha(x) > 0$. Donc par récurrence, si $x_0 \in]0, +\infty[$,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in]0, +\infty[.$$
3. La fonction $f_\alpha : x \mapsto \alpha x e^{-x}$ est clairement $\mathcal{C}^\infty$sur $\mathbb{R}_+$, sa limite en $+\infty$ est 0 par croissances comparées et
   $$\forall x \geq 0, \quad f'_\alpha(x) = \alpha(1-x)e^{-x}.$$
   Le signe de cette expression (qui ne s'annule que pour $x = 0$) est clair et on en déduit le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$f_\alpha(x)$	0	$\nearrow$	αe^{-1}	$\searrow$	0

4. On a les équivalences, pour $x \in \mathbb{R}^+$:
   $$f_\alpha(x) = x \iff [(x=0) \quad \text{ou} \quad (\alpha e^{-x} = 1 \quad \text{et} \quad x > 0)] \iff [(x=0) \quad \text{ou} \quad (x = \ln(\alpha) \quad \text{et} \quad x > 0)]$$
   Deux cas se présentent :
   - Si $\alpha \leq 1$, l'équation $f_\alpha(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$ admet 0 pour unique solution ;
   - Si $\alpha > 1$, l'équation $f_\alpha(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$ admet 0 et $\ln(\alpha)$ pour solutions.
5. (a) On écrit d'abord les fonctions de calcul : déclaration de la fonction f_α puis de la fonction calculant des termes consécutifs de la suite (x_n).

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x,alpha=4):
    return alpha*x*np.exp(-x)

def X(x0=0.5,alpha=4,nmax = 200):
    """
    Calcul et retourne les termes de 0 à nmax de la suite récurrente
    """
    X = [x0]
    for _ in range(nmax):
        X.append(f(X[-1],alpha=alpha))
    return X
```

On écrit ensuite la fonction effectuant les représentions grahhiquees demandées, qui seront exploitées dans la question suivante (d'où le nom).

```python
def graphe5b(alpha):
    x = X(alpha=alpha)
    pair = True
    npairs = [] ; xpairs = []
    nimpairs = [] ; ximpairs = []
    for i in range(len(x)):
        if pair :
            npairs.append(i)
            xpairs.append(x[i])
        else :
            nimpairs.append(i)
            ximpairs.append(x[i])
        pair = not(pair)

    plt.subplots()
    plt.plot(npairs,xpairs,'x',color='blue')
    plt.plot(nimpairs,ximpairs,'x',color='red')
    plt.title(r"$\alpha = $" + str(alpha) + "$")
    print("suite-rec-alpha"+str(alpha)+".pdf")
    plt.show()
```

(b) Les graphes montrent le comportement de la suite lorsque $x_0 = 0.5$ et $\alpha = 4$ (il y a l'air d'y avoir convergence) puis $\alpha = 15$ (les pairs et impairs jouent chacun de leur côté, ni les uns ni les autres ne se sont stabilisés).

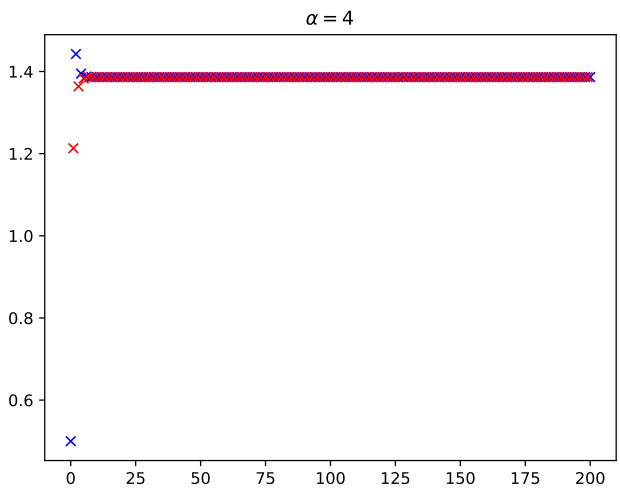

FIGURE 1 – Rep. graph. de la suite (x_n) avec $\alpha = 4$.

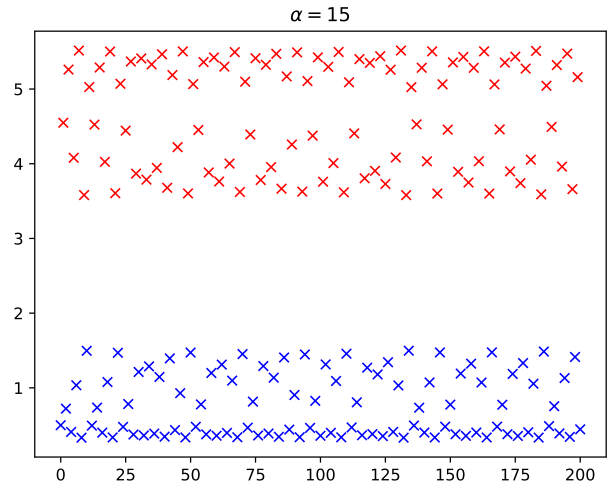

FIGURE 2 – Rep. graph. de la suite (x_n) avec $\alpha = 15$.

6. On suppose que $\alpha \in]e, e^2[$.

   (a) Posons, pour $x \geq 0$, $g_\alpha(x) = f_\alpha(x) - x$. Sa limite en $+\infty$ est $-\infty$. Sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \geq 0,\ g'_\alpha(x) = \alpha.(1-x)e^{-x} - 1$$

   et sa dérivée seconde :

$$\forall x \geq 0,\ g''_\alpha(x) = \alpha.(-1-(1-x))e^{-x} = \alpha.(x-2)e^{-x}$$

   Donc le tableau de variations de g'_α est :

x	0	2	$+\infty$
g'_α	$\alpha-1$	$-\alpha e^{-2}-1$	-1

Comme $\alpha > 1$, il existe $z_\alpha > 0$ tel que :

$$\forall 0 \leq x < z_\alpha, \quad g'_\alpha(x) > 0 \quad \text{et} \quad \forall x > z_\alpha, \quad g'_\alpha(x) < 0.$$

La fonction g_α est donc strictement croissante sur $[0, z_\alpha]$, strictement décroissante sur $[z_\alpha, +\infty[$. Comme $g'_\alpha(1) = -1$, $z_\alpha \in [0, 1[$. Le tableau de variation de g_α a la forme suivante :

x	0	z_α	$+\infty$
g_α	0	$g_\alpha(z_\alpha)$	$-\infty$

Remarquons que avec l'hypothèse $\alpha \in]e, e^2[$ on a :

$$g_\alpha(1) = \alpha e^{-1} - 1 > 0 \quad ; \quad g_\alpha(\ln(\alpha)) = 0 \quad ; \quad g_\alpha(2) = \alpha . e^{-1} - 1 < 0$$

(b) Étudions la fonction f'_α sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Ce calcul a déjà été fait à la question précédent où l'on a étudié $g'_\alpha = f'_\alpha - 1$. Le tableau de variation de g'_α montre que $f'_\alpha(x)$ (lorsque x varie sur $[1, +\infty[$) varie entre $0 = f'_\alpha(1) = \lim\limits_{x \to +\infty} f'_\alpha(x)$ et $-\alpha . e^{-2} < 0$. On a donc :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad |f'_\alpha(x)| \leq \alpha . e^{-2}.$$

On peut alors poser $M = \alpha e^{-2} \in [0, 1[$ (du fait de l'hypothèse faite sur α) pour obtenir que pour tout réel $x \in [1, +\infty[$:

$$|f'_\alpha(x)| \leqslant M.$$

(c) Par le théorème de la bijection, le tableau de variations de f_α établi à la question 3 montre que, comme $f_\alpha(1) = \alpha . e^{-1} > 1$, l'équation $f_\alpha(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}_+$ l'une, λ_α, dans $[0, 1[$ et l'autre, μ_α, dans $]1, +\infty[$.

(d) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [0, \lambda_\alpha[\cup]\mu_\alpha, +\infty[$.

Le tableau de variations de f_α établi à la question 3 montre qu'alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} \in [0, 1].$$

Comme $[0, 1] \subset [0, \lambda_\alpha[$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \in [0, 1] \subset [0, \lambda_\alpha[.$$

On a vu en question 6.(a) que $g_\alpha \geq 0$ sur $[0, 1]$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_{n+1} - x_n = g_\alpha(x_n) \geq 0,$$

ce qui monter que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et comme elle est majorée par 1, elle converge vers une certaine limite $\ell \in [0, 1]$.

Par continuité de f_α (notamment en ℓ), on a $\ell = f_\alpha(\ell)$ et donc soit $\ell = 0$ (exclus car la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante et $x_1 > 0$), soit $\ell = \ln(\alpha) > 1$ (ce qui est exclus aussi).
On en déduit que la proposition

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [0, \lambda_\alpha[\cup]\mu_\alpha, +\infty[$$

est fausse et donc que la proposition

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ x_{n_0} \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha].$$

est vraie.

(e) On admet que $f_\alpha\left(\alpha e^{-1}\right) > 1 = f_\alpha(\mu_\alpha)$.
Sachant que $\alpha e^{-1} > 1$, le tableau de variations de f_α établi à la question 3 montre que $\alpha e^{-1} < \mu_\alpha$.
Maintenant, toujours par ce tableau de variation, si $x \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$ alors $f(x) \in [1, \alpha e^{-1}] \subset [1, \mu_\alpha]$.
En particulier l'intervalle $[1, \mu_\alpha]$ est stable par f_α.

(f) Soit un entier n_0 tel que $x_{n_0} \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$, on a donc, par la question précédente que $x_{n_0+1} = f_\alpha(x_{n_0}) \in [1, \mu_\alpha]$.
Comme cet intervalle est stable par f_α, on en déduit que

$$\forall n \geq n_0 + 1, \quad x_n \in [1, \mu_\alpha].$$

Maintenant, pour $n \geqslant n_0 + 1$, en appliquant le théorème des accroissements finis à f_α (qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle d'intérêt) entre $\ln(\alpha) \geq 1$ et $x_n \geq 1$, on obtient l'existence de $c_n \geq 1$ tel que

$$|x_{n+1} - \ln(\alpha)| = |f_\alpha(x_n) - f_\alpha(\ln(\alpha))| = |f'_\alpha(c_n)|.\,|x_n - \ln(\alpha)|$$

Comme d'après la question 6.(b), $|f'_\alpha(c_n)| \leq M$ car $c_n \geq 1$ alors

$$|x_{n+1} - \ln(\alpha)| \leqslant M\,|x_n - \ln(\alpha)|\,.$$

(g) Par une récurrence, on obtient que

$$\forall n \geq n_0 + 1,\ |x_n - \ln(\alpha)| \leqslant M^{n-(n_0+1)}\,|x_{n_0+1} - \ln(\alpha)|$$

et comme $M \in [0, 1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} M^{n-(n_0+1)} = 0$ et donc (gendarmes)

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n - \ln(\alpha)| = 0$$

c'est-à-dire : la suite (x_n) converge vers $\ln(\alpha)$.
Cela explique l'expérience numérique avec $\alpha = 4 \in]e, e^2[$ où l'on a convergence de (x_n) vers $\ln(4) = 2\ln(2) \simeq 1,38$.