

---

# Questions de cours

Une liste (non exhaustive) de questions de cours pour l'oral agro-veto.

1. Énoncer le théorème de transfert dans le cas d'une variable aléatoire admettant une densité.
2. Énoncer le théorème du rang pour une application linéaire  $f : E \rightarrow F$ .
3. Lien(s) entre l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes et leur covariance.
4. Définition de la dérivée d'une fonction  $f$  en un point  $a$ .
5. Donner la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre pour un endomorphisme  $f$  d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie.
6. Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions définies au voisinage de  $+\infty$  et ne s'annulant pas, que veut dire la phrase «  $f$  et  $g$  sont équivalentes au voisinage de  $+\infty$  » ?
7. Énoncer le théorème central limite.
8. Allure de la représentation graphique de la fonction cos sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ .
9. Si  $(A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  et  $(B_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  désignent deux matrices carrées d'ordre  $n$ , et  $C = AB$ , rappeler pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  l'expression de  $C_{i,j}$  en fonction des coefficients de  $A$  et de  $B$ .
10. Définition de la distance d'un vecteur  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  à un sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathbb{R}^n$ .
11. Pour une application  $f : E \rightarrow F$  bijective de  $E$  vers  $F$ , définition de la fonction réciproque  $f^{-1}$ .
12. Donner la définition d'une valeur propre ainsi que d'un sous-espace propre pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
13. Soit  $\alpha$  un nombre réel,  $\alpha \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . Donner les solutions de l'équation  $\tan(x) = \tan(\alpha)$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .
14. Énoncer l'inégalité de Markov.
15. Donner la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.
16. Donner la définition d'une base d'un espace vectoriel.
17. Rappeler la formule des accroissements finis.
18. Condition nécessaire et suffisante pour qu'une application linéaire soit injective.
19. Énoncer l'inégalité de Cauchy–Schwarz.
20. Donner la formule de la variance d'une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2.
21. Donner deux conditions suffisantes et non nécessaires de diagonalisabilité d'une matrice carrée réelle.
22. Dans un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$  donner la définition d'un système complet d'événements incompatibles. Énoncer alors la formule des probabilités totales pour calculer  $\mathbb{P}(A)$  pour  $A$  un événement quelconque, étant donné système complet d'événements incompatibles  $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ .
23. Fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $[-\pi, \pi]$ .
24. Énoncé du théorème du rang.
25. Définition d'un espace vectoriel de dimension finie; définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.
26. Espérance et variance d'une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre  $1/3$ .
27. Rappeler les deux expressions de la dérivée de la fonction tan.

- 
28. Allure de la représentation graphique d'une densité de la loi exponentielle de paramètre 1.
29. Énoncer le théorème de Pythagore dans  $\mathbb{R}^n$ .
30. Si  $f$  est la fonction définie sur  $]0, 1[$  par :  $f(x) = \sqrt{1-x}$ , déterminer l'expression de sa dérivée  $f'$ .
31. Si  $\alpha$  est un réel quelconque, déterminer sur  $]0, +\infty[$  l'expression d'une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ .
32. Définition d'une matrice carrée inversible.
33. Pour  $|q| < 1$ , donner l'expression des sommes suivantes :  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot q^{n-1}$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2}$ .
34. Donner la définition du produit scalaire de deux vecteurs  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ .
35. Donner une représentation paramétrique de la droite de  $\mathbb{R}^3$  passant par  $A = (x_A, y_A, z_A)$  et de vecteur directeur  $u = (a, b, c)$ .
36. Énoncer la loi faible des grands nombres.
37. Définition de la convergence de  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ .
38. Qu'appelle-t-on racine d'un polynôme ? Qu'appelle-t-on ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme ?
39. Énoncer la formule de changement de base pour un vecteur, la formule de changement de base pour un endomorphisme.
40. Énoncer une condition suffisante mais non nécessaire pour qu'une matrice soit diagonalisable et une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle le soit.
41. Densité d'une loi normale centrée réduite.
42. Énoncer le théorème de Rolle.
43. À quelle(s) condition(s) sur sa fonction de répartition une variable aléatoire  $X$  admet-elle une densité de probabilité ? Comment détermine-t-on alors une densité de  $X$  ?
44. Définition de l'espérance d'une variable aléatoire  $X$  discrète, à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .
45. Donner le développement limité d'ordre 4 de  $x \mapsto \ln(1+x)$  en 0.
46. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}^n$  soit diagonalisable.
47. Espérance d'une variable aléatoire réelle admettant une densité  $f$  continue.
48. Somme et produit des racines d'un polynôme du second degré  $aX^2 + bX + c$  où  $a \neq 0$ .
49. Allure graphique de la fonction sinus sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ .
50. Développement limité d'ordre 5 en 0 de  $\sin$ .
51. Définition d'une famille génératrice dans un espace vectoriel  $E$ .
52. Tracer l'allure de la courbe d'une fonction de densité d'une variable aléatoire de loi normale d'espérance 1 et de variance égale à 1.
53. Donner une densité de la loi exponentielle de paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ .
54. Pour  $n$  et  $k$  des entiers naturels, donner l'expression du coefficient binomial  $\binom{n}{k}$ .
55. Définition de la convergence absolue d'une série numérique. Lien entre convergence et convergence absolue.

- 
56. Pour  $n$  un entier naturel, rappeler les valeurs des sommes  $\sum_{k=0}^n k$  et  $\sum_{k=0}^n k^2$ .
57. Formules d'Euler et de Moivre.
58. Donner la valeur de  $\mathbb{E}(X^2)$  si  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ .
59. Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires admettant une variance, que vaut  $\mathbb{V}(X + Y)$ ? Que dire si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes?
60. Énoncer le théorème d'intégration par parties pour une intégrale sur un segment.
61. Donner la définition des fonctions partielles d'une fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$ .
62. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel  $F$  d'un espace vectoriel  $E$ .
63. Donner la définition d'une densité de probabilité.
64. Donner la définition du gradient d'une fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$ .