

CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ

Toutes les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

3.1 Continuité

3.1.1 Définition

Définition 3.1 (Continuité)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$.

1. On dit que f est **continue en a** si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

2. On dit que f est **continue sur I** si elle est continue en tout point de I .

Méthode 3.1 (Montrer qu'une fonction est continue)

1. En général, pour montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle I on utilise :
 - les connaissances sur la continuité des fonctions usuelles ;
 - le fait que la somme, le produit, le quotient (quand le dénominateur ne s'annule pas), la composée de fonctions continues sont continues.
2. Dans certains cas, on est obligé de revenir à la définition et d'étudier la limite de la fonction en certains points.

3.1.2 Résultats fondamentaux

Théorème 3.0 (Résultats fondamentaux)

1. **Prolongement par continuité** : si f est définie sur $I \setminus \{a\}$ et admet une limite finie ℓ en a alors la fonction g définie sur I par :

$$\forall x \in I, \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

est continue en a .

2. **Théorème des bornes atteintes** : soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.
3. **Théorème des valeurs intermédiaires** : soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $(a, b) \in I^2$ avec $a \leq b$. Alors pour tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = c$.
4. **Théorème de la bijection** : soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I . Alors $f(I)$ est un intervalle, f réalise une bijection de I sur $f(I)$ et sa bijection réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même sens de monotonie que f .

3.2 Dérivabilité

3.2.1 Définition

Définition 3.2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

1. On dit que f est **dérivable en a** si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Dans ce cas cette limite est appelé le nombre dérivé de f en a et noté $f'(a)$.
2. La fonction f est dite **dérivable sur I** si elle est dérivable en tout point de I .
3. La fonction f est dite **de classe $\mathcal{C}^k$ sur I** si elle est k fois dérivable sur I et de dérivée k -ième continue.

Méthode 3.2 (Montrer qu'une fonction est dérivable/ $\mathcal{C}^k$)

1. En général, pour montrer qu'une fonction est dérivable/ $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I on utilise :
 - les connaissances sur la dérivabilité des fonctions usuelles ;
 - le fait que la somme, le produit, le quotient (quand le dénominateur ne s'annule pas), la composée de fonctions, la bijection réciproque de fonctions dérivables/ $\mathcal{C}^k$ sont dérivables/ $\mathcal{C}^k$.
2. Dans certains cas, on est obligé de revenir à la définition et d'étudier la limite du taux d'accroissement.

3.2.2 Formulaire

Fonction	Dérivée	sur tout I tel que :
$u + v$	$u' + v'$	u et v dérivables sur I
$\lambda u, \lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda u'$	u dérivable sur I
uv	$u'v + v'u$	u et v dérivables sur I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	u et v dérivables sur I et v ne s'annule pas sur I
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	v dérivable et ne s'annule pas sur I
$u \circ v$	$v' \times (u' \circ v)$	v dérivable sur I et u dérivable sur $v(I)$
u^{-1}	$\frac{1}{u' \circ u^{-1}}$	u dérivable et sa dérivée ne s'annule pas sur $u^{-1}(I)$
$u^a, a \in \mathbb{R}$	$au'u^{a-1}$	u dérivable et strictement positive sur I

TABLE 3.1 – Formules de dérivation

Fonction	Dérivée	sur
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$
$x^a, a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	ax^{a-1}	$]0, +\infty[$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

TABLE 3.2 – Dérivées usuelles

3.2.3 Résultats fondamentaux

Théorème 3.0 (Résultats fondamentaux)

1. **Théorème de Rolle** : si f est définie et continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ (avec $a < b$) et telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. **Théorème des accroissements finis** : si f est définie et continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ (avec $a < b$) alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.