Révisions 2

Limite d'une fonction

2.1 Limites

2.1.1 Limites finies

Définition 2.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un élément ou une borne de I.
Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que f **a pour limite** ℓ **en** a lorsque :

- si $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon,$$

- si $a = +\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A > 0 \ \forall x \in I, \quad x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon,$$

- si $a = -\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A < 0 \ \forall x \in I, \quad x \leq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{a} f = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$$

2.1.2 Limites infinies

Définition 2.2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un élément ou une borne de I.

1. On dit que f **a pour limite** $+\infty$ **en** a lorsque :
   - si $a \in \mathbb{R}$:
   $$\forall A > 0\ \exists \alpha > 0\ \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A,$$
   - si $a = +\infty$:
   $$\forall A > 0\ \exists B > 0\ \forall x \in I, \quad x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A,$$
   - si $a = -\infty$:
   $$\forall A > 0\ \exists B < 0\ \forall x \in I, \quad x \leq B \Rightarrow f(x) \geq A.$$
2. On dit que f **a pour limite** $-\infty$ **en** a lorsque :
   - si $a \in \mathbb{R}$:
   $$\forall A < 0\ \exists \alpha > 0\ \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq A,$$
   - si $a = +\infty$:
   $$\forall A < 0\ \exists B > 0\ \forall x \in I, \quad x \geq B \Rightarrow f(x) \leq A,$$
   - si $a = -\infty$:
   $$\forall A < 0\ \exists B < 0\ \forall x \in I, \quad x \leq B \Rightarrow f(x) \leq A.$$

On note :
$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{a} f = \pm\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty$$

2.2 Propriétés de la limite

2.2.1 Unicité

Proposition 2.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un élément ou une borne de I. Si f admet une limite (finie ou infinie) en a alors cette limite est unique.

2.2.2 Opérations sur les limites, limites usuelles

a \ $\lim\limits_a f$	exp	ln	$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\arctan(x)$
$-\infty$	0		$\pm\infty$ selon la parité de n	$-\frac{\pi}{2}$
0	1	$-\infty$ (en 0^+)	0	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{\pi}{2}$

Table 2.1 – Limites usuelles

$\lim\limits_a f$	$\lim\limits_a g$	$\lim\limits_a (f+g)$	$\lim\limits_a f \times g$	$\lim\limits_a \frac{f}{g}$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\ell + \ell'$	$\ell\ell'$	$\frac{\ell}{\ell'}$
$\ell \neq 0$	0	ℓ	0	$\pm\infty$ $(*)$
0	0	0	0	F.I
$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ $(*)$	0
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I	0
$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ $(*)$	$\pm\infty$ $(*)$
$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	F.I	$\pm\infty$ $(*)$
$+\infty$	$-\infty$	F.I	$-\infty$	F.I
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I

Table 2.2 – Opérations sur les limites

- Le symbole $(*)$ signifie que le signe est à étudier selon la règle des signes.
- F.I désigne les formes indéterminées qu'il faut étudier au cas par cas.

Proposition 2.2 (Croissances comparées)

Soient a, b et c trois réels strictement positifs.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{bx^c}}{x^a} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0;$$

$$\lim_{x\to 0} x^a(\ln(x))^b = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} x^a e^{bx} = 0.$$

2.2.3 Résultats fondamentaux

Théorème 2.0 (Résultats fondamentaux)

1. **Passage à la limite dans les inégalités larges :** si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a alors (sous réserve d'existence) :
$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$
2. **Théorème de la limite monotone :** soit f une fonction croissante sur $I =]a, b[$. Alors f admet une limite à droite en a (finie si f est minorée et égale à $-\infty$ sinon) et une limite à gauche en b (finie si f est majorée et égale à $+\infty$ sinon).
Le résultat s'adapte aux fonctions décroissantes.
3. **Théorème des gendarmes :** soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I et a un élément ou une borne de I.
Si f et h admettent une même limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en a et qu'au voisinage de a on a : $f \leq g \leq h$. Alors :
$$\lim_{x\to a} g(x) = \ell.$$
4. **Lien avec les suites** : soit f une fonction admettant pour limite b en a et soit (u_n) une suite de limite a. Alors
$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = b.$$