Généralités, fonctions usuelles

Toutes les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1.1 Généralités sur les fonctions

Définition 1.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un point.

1. Si I est symétrique par rapport à 0, on dit que :
   - f est **paire** si : $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$;
   - f est **impaire** si : $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$.
2. On dit que f est **T-périodique** si
   - f est définie sur un domaine D tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in D \Rightarrow x + T \in D$,
   - $\forall x \in D,\ f(x+T) = f(x)$.
3. On dit que f est **croissante** (resp. **strictement croissante**) sur l'**intervalle** I si :
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad (\text{resp. } x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$
4. On dit que f est **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) sur l'**intervalle** I si :
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \quad (\text{resp. } x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$
5. On dit que f est **majorée** par M sur I si :
$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq M.$$
6. On dit que f est **minorée** par m sur I si :
$$\forall x \in I, \quad m \leq f(x).$$
7. On dit que f est **bornée** sur I si elle est majorée et minorée sur I.

1.2 Fonctions usuelles

1.2.1 Fonction $x \mapsto x^n$, $n \geq 2$

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- **Parité :** de la parité de n.
- **Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$:** $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = nx^{n-1}$.
- **Variations :**

Cas n pair

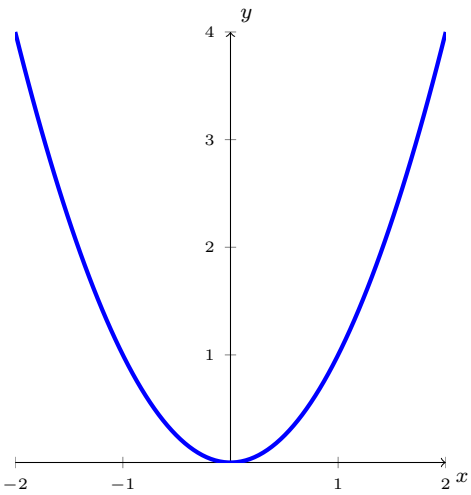
x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Cas n impair

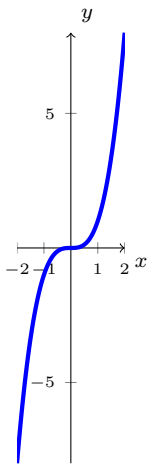
x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

- **Graphe :**

Cas n pair (ici $n = 2$) :



Cas n impair (ici $n = 3$) :



1.2.2 Fonction $x \mapsto x^{-n}$, $n \geq 1$

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.
- **Parité :** de la parité de n.
- **Continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$:** $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$.
- **Variations :**

Cas n pair

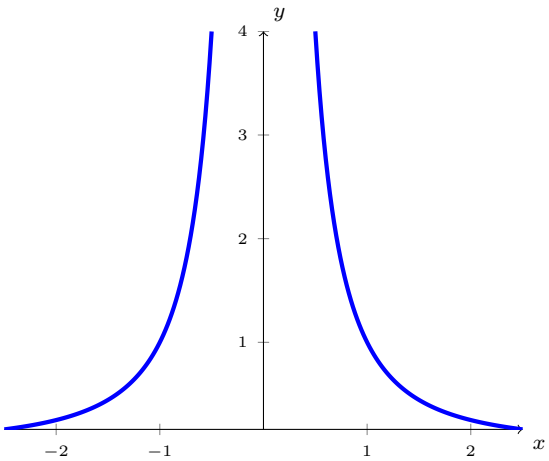
x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	‖	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Cas n impair

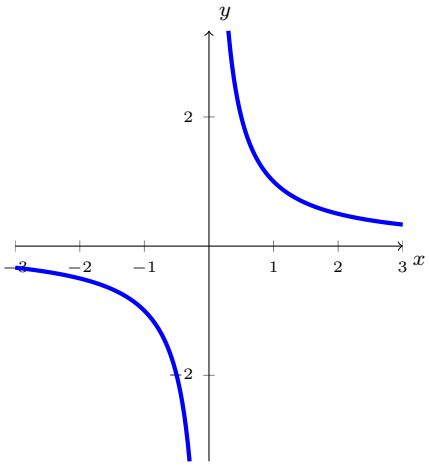
x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	‖	$-$	
Variations de f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

- **Graphe :**

Cas n pair (ici $n = 2$) :



Cas n impair (ici $n = 3$) :



1.2.3 Fonction logarithme

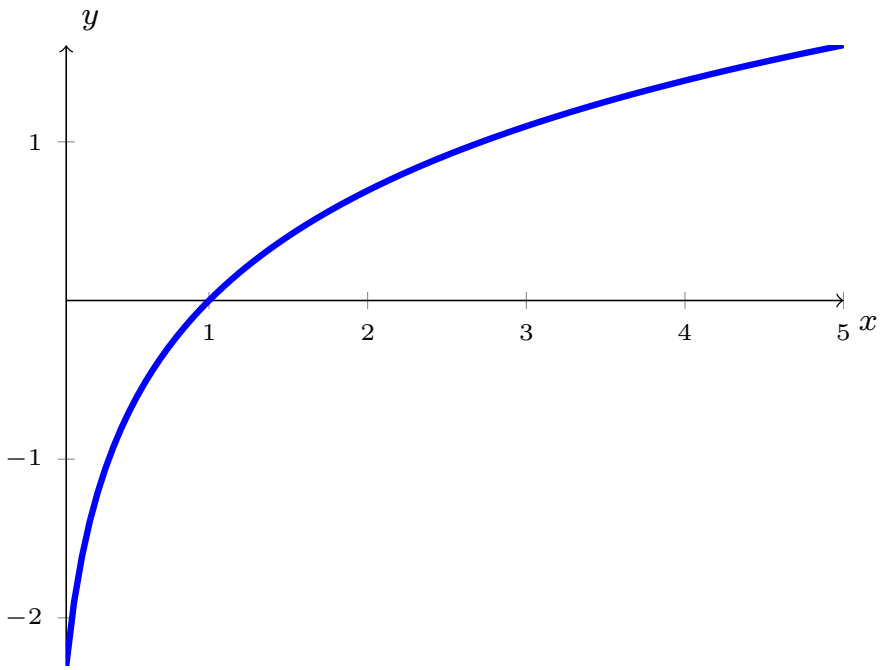
- **Définition :** la primitive sur $]0,+\infty[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.
- $\mathcal{D}_f =]0,+\infty[$.
- **Continue et dérivable sur** $]0,+\infty[$ **:** $\forall x > 0,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- **Propriété :** pour tout $x, y > 0$:

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

- **Variations :**

x	0	1	$+\infty$
Signe de $\dfrac{1}{x}$		$+$	
Variations de ln	$-\infty$	0	$+\infty$

- **Graphe :**



1.2.4 Fonction exponentielle

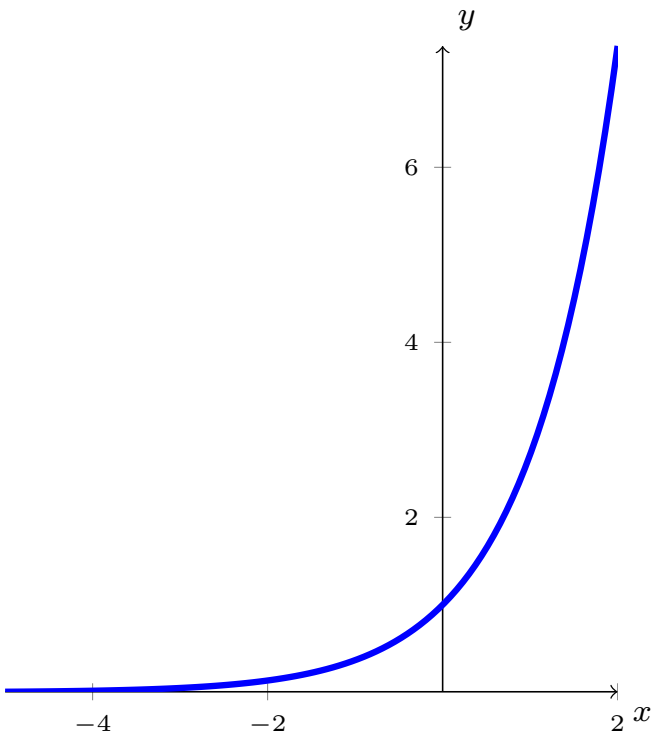
- **Définition :** bijection réciproque de ln.
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- **Continue et dérivable sur** $]\mathbb{R}$ **:** $\forall x > 0,\ \exp'(x) = \exp(x) = e^x$.
- **Propriété :** pour tout $x, y > 0$:

$$e^{x+y)} = e^x e^y$$
$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$

- **Variations :**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de e^x		$+$	
Variations de exp	$-\infty$ ↗	1 ↗	$+\infty$

- **Graphe :**



1.2.5 Fonction $x \mapsto x^a$, $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$

- **Définition :** $x^a = e^{a\ln(x)}$ pour $x > 0$.
- **Continue et dérivable sur** $]0, +\infty[$ **:** $\forall x > 0,\ f'(x) = ax^{a-1}$.
- **Variations :**

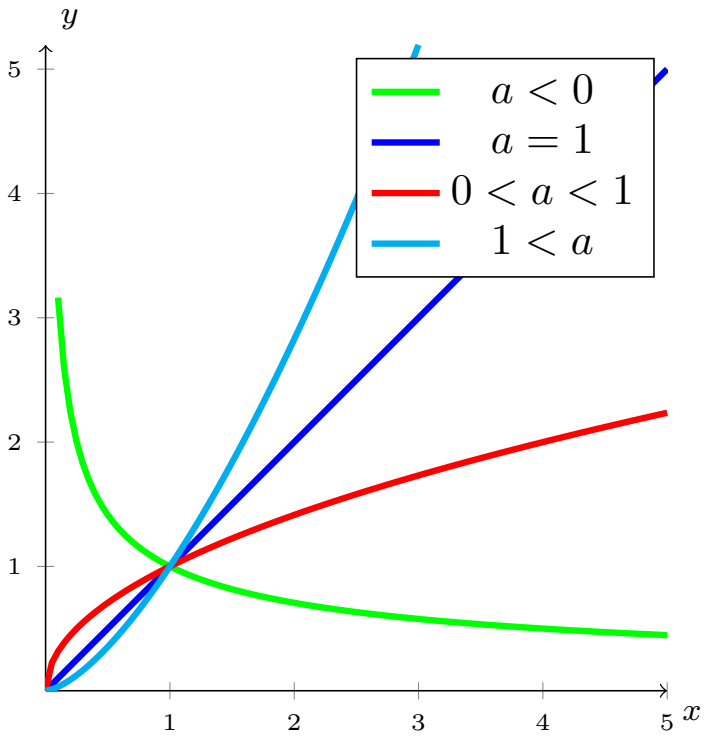
  Si $a < 0$:

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖		$-$		
Variations de f	‖ $+\infty$	↘	1	↘	0

  Si $a > 0$:

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖		$+$		
Variations de f	‖ 0	↗	1	↗	$+\infty$

- **Graphe :**



1.2.6 Fonction $x \mapsto a^x$, $a > 0$

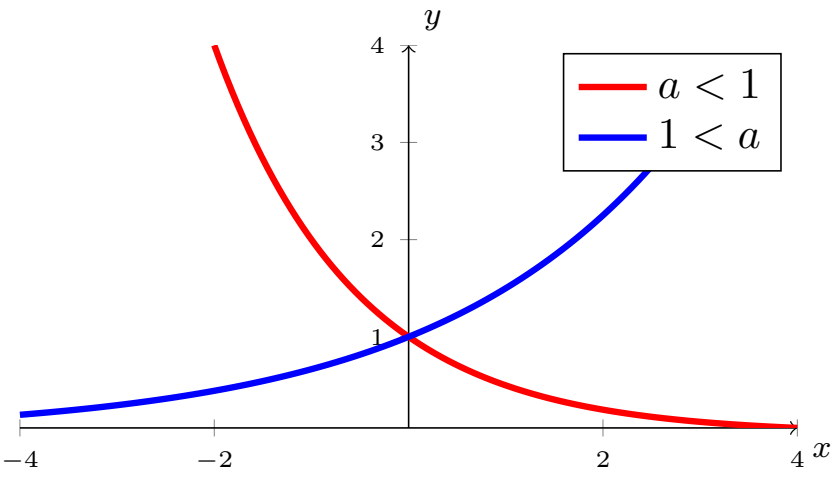
- **Définition :** $a^x = e^{x\ln(a)}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- **Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$:** $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \ln(a)a^x$.
- **Variations :**
  Si $a < 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	
Variations de f	$+\infty$ ↘	1 ↘	0

  Si $a > 1$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	
Variations de f	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

- **Graphe :**

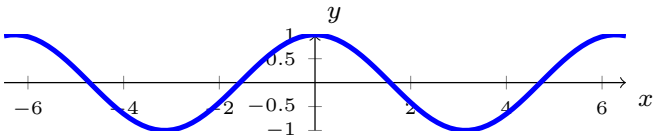


1.2.7 Fonction cosinus

- **Domaine de définition :** $\mathbb{R}$.
- **Parité, périodicité :** paire, 2π-périodique.
- **Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$:**
$$\cos' = -\sin\,.$$
- **Variations :**

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos'(x)$	0		$+$		0		$-$		0
$\cos$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

- **Graphe :**

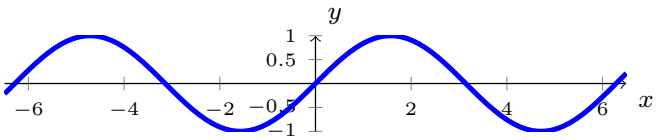


1.2.8 Fonction sinus

- **Domaine de définition :** $\mathbb{R}$.
- **Parité, périodicité :** impaire, 2π-périodique.
- **Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$:**
$$\sin' = \cos\,.$$
- **Variations :**

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$\sin$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

- **Graphe :**

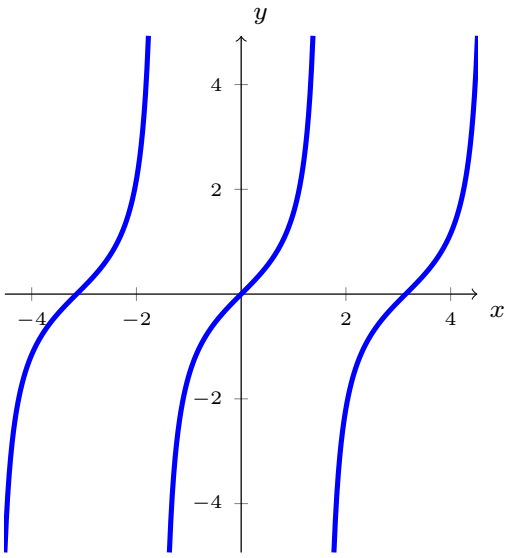


1.2.9 Fonction tangente

- **Domaine de définition :**
$$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$
- **Parité, périodicité :** impaire, π-périodique.
- **Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$:**
$$\tan' = 1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$
- **Variations :**

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
tan	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

- **Graphe :**

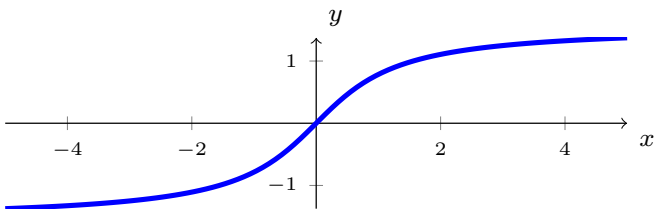


1.2.10 Fonction arctangente

- **Définition :** bijection réciproque de tan sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- **Domaine de définition :** $\mathbb{R}$.
- **Parité :** impaire.
- **Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$:**

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

- **Variations :**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
arctan	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	0 ↗	$\frac{\pi}{2}$

- **Graphe :**