Révisions 4

Comparaisons et développements limités

Toutes les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4.1 Comparaisons

4.1.1 Négligeabilité

Définition 4.1

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère a un élément de I ou une borne de I (a peut être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$).
On suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage de a (sauf éventuellement en a).
On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

On note alors $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$.

Exemple 4.1.

1. **Croissances comparées** : soient a, b, c des réels strictement positifs.

$$x^a = \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{bx^c}\right) \quad ; \quad \ln(x)^b = \underset{x\to+\infty}{o}(x^a).$$

2. Soient $m < n$ des entiers naturels.

$$x^m = \underset{x\to+\infty}{o}(x^n) \quad ; \quad x^n = \underset{x\to 0}{o}(x^m).$$

Proposition 4.1 (Utile pour les DL)

Soient λ, μ des réels et soit m et n des entiers naturels. Alors :

1. $\lambda \times \underset{x\to 0}{o}(x^n) + \mu \times \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$;
2. $x^m \times \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \underset{x\to 0}{o}(x^{n+m})$;
3. $\underset{x\to 0}{o}(x^m) \times \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \underset{x\to 0}{o}(x^{n+m})$;
4. si $m < n$ on a : $\underset{x\to 0}{o}(x^n) + \underset{x\to 0}{o}(x^m) = \underset{x\to 0}{o}(x^m)$.

4.1.2 Équivalence

Définition 4.2

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère a un élément de I ou une borne de I (a peut être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$).
On suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage de a (sauf éventuellement en a).
On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de a si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

On note alors $f(x) = \underset{x\to a}{\sim} (g(x))$.

Proposition 4.2 (Opérations sur les équivalents)

Soient f, g, h et e quatre fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{N}$. On considère a un élément de I ou une borne de I (a peut être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$).

1. (*Symétrie*) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.
2. (*Transitivité*) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$.
3. (*Produit*) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x\to a}{\sim} e(x)$ alors $f(x)h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)e(x)$.
4. (*Inverse*) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, que f et g ne s'annulent pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a) alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{1}{g(x)}$.
5. (*Puissance*) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $f(x)^k \underset{x\to a}{\sim} g(x)^k$.
6. (*Valeur absolue*) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $|f(x)| \underset{x\to a}{\sim} |g(x)|$.

Remarque 4.1.

1. Un cas particulier du point 3 en prenant $e = h$ donne :
   si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $f(x)h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)h(x)$.
2. Les points 3 et 4 signifient que la relation d'équivalence est compatible avec le produit et l'inverse.

3. **La relation d'équivalence n'est pas compatible avec l'addition : on n'additionne jamais des équivalents !**
4. Les points 5 et 6 signifient que la relation d'équivalence est compatible avec la composition à gauche par une fonction puissance ou la fonction valeur absolue.
5. **La relation d'équivalence n'est pas compatible avec la composition à gauche en général : par exemple, on ne passe jamais au logarithme ou à l'exponentielle dans les équivalents !**

Proposition 4.3 (Composition à droite)

Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x\to b} h(x) = a$ alors $f \circ h \underset{x\to b}{\sim} g \circ h$.

Proposition 4.4 (Équivalents usuels)

1. On a les équivalents suivants au voisinage de 0 :
$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \quad ; \quad e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \quad ; \quad (1+x)^a - 1 \underset{x\to 0}{\sim} ax \ (a \in \mathbb{R}^*).$$
2. Soient $n > p$ et $(a_p, a_{p+1}, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-p+1}$ avec $a_n \neq 0$ et $a_p \neq 0$.
   - En $+\infty$ et $-\infty$:
   $$a_p x^p + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n.$$
   - En 0 :
   $$a_p x^p + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p.$$

Proposition 4.5 (Limite et équivalent)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère a un élément de I ou une borne de I (a peut être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$).

1. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et si f admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ quand x tend vers a alors g admet pour limite ℓ quand x tend vers a.
2. Si f admet une limite **finie et non nulle** ℓ quand x tend vers a alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$.

Méthode 4.1

Pour déterminer un équivalent simple d'une fonction au voisinage d'un point a, on utilise les mêmes méthodes que pour les suites :

1. on peut procéder de manière directe : souvent de la même manière que pour lever une forme indéterminée (factorisation par le terme dominant au voisinage de a, multiplication par la quantité conjuguée...) ;
2. on peut parfois déterminer un équivalent à l'aide d'un encadrement par deux fonctions équivalentes entre elles ;
3. on peut utiliser les équivalents usuels et les opérations sur les équivalents.

4.2 Développements limités

4.2.1 Définition et propriétés

Définition 4.3 (Développement limité en 0)

Déterminer un développement limité à l'ordre n en 0 d'une fonction f consiste à déterminer, s'ils existent, des réels $a_0, \ldots, a_n$ tel que pour tout x au voisinage de 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n).$$

Théorème 4.0 (Formule de Taylor-Young)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle contenant 0. Alors f admet le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 suivant :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n).$$

Fonction	Développement limité
e^x	$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$= 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$
$\ln(1-x)$	$= -x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^n}{n} + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$
$\cos(x)$	$= 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n})$
$\sin(x)$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+1})$
$(1+x)^a$	$= 1 + ax + \frac{a(a-1)x^2}{2} + \ldots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$

4.2.2 Applications

Méthode 4.2 (Position relative par rapport à une tangente)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I.

1. La courbe $\mathcal{C}_f$ possède une tangente non vertical en a si et seulement si f est dérivable en a.

   l'équation réduite de la tangente est alors donnée par **la partie polynomiale du DL$_1$ de f en a.**

2. Si f admet un DL de la forme

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n) \quad \text{où} \quad a_n \neq 0$$

   alors la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente est donnée par le signe de $a_n(x-a)^n$.

   - Cas n pair : la courbe ne traverse pas sa tangente.
     - Si $a_n > 0$: la courbe est au-dessus de sa tangente au voisinage de a.
     - Si $a_n < 0$: la courbe est en-dessous de sa tangente au voisinage de a.
   - Cas n impair : la courbe traverse sa tangente.
     - Si $a_n > 0$: la courbe est en-dessous pour $x < a$ puis au-dessus pour $x > a$.
     - Si $a_n < 0$: la courbe est au-dessus pour $x < a$ puis en-dessous pour $x > a$.