

Mathématiques – Révisions**FONCTIONS, CONTINUITÉ, DÉRIVABILITÉ****1 Limites****Exercice 1.**

1. Déterminer la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$ de $\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.
2. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que

$$\forall x \in [A, +\infty[, \quad 0 \leq \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \leq 1.$$

Exercice 2. Discuter suivant la valeur de $\alpha > 0$ la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$ de

$$x^\alpha((x+1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}).$$

Exercice 3. Déterminer un équivalent simple de chacune des fonctions suivantes au voisinage de x_0 et en déduire la limite en x_0 .

1. $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $x_0 = +\infty$.
2. $g(x) = \frac{x^3 + x - 1}{5x^4 + 2x^2}$ en $x_0 = 0$ puis en $x_0 = +\infty$.
3. $h(x) = e^{x^2} - 1$ en $x_0 = 0$.
4. $i(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} - 1$ en $x_0 = +\infty$.
5. $j(x) = \frac{e^{-x^2} - 1}{x^2 + x}$ en $x_0 = 0$.
6. $l(x) = \ln(1+x)$ en $x_0 = +\infty$.
7. $m(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ en $x_0 = +\infty$.
8. $n(x) = \frac{x - \ln(x)}{x+1}$ en $x_0 = 0$ puis en $x_0 = +\infty$.

Exercice 4. Déterminer la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$ de $xe^{-\sqrt{\ln x}}$.**2 Continuité et dérivabilité****Exercice 5.**

1. Montrer que la fonction $f : t \mapsto \ln(\sqrt{t^2 - 1} + t)$ définit une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
2. Pour $y \in J$, justifier qu'il existe un unique $x \geq 1$ tel que $y = f(x)$.
Calculer et simplifier $e^y + e^{-y}$ et $e^y - e^{-y}$

3. Déterminer un sous-intervalle de J maximal sur lequel f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$. Donner une formule pour $(f^{-1})'$ sur cet intervalle.

Exercice 6. Soit $t \geq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $P_t(x) = x^3 + tx - 1$.

1. Montrer que P_t admet une unique racine réelle que l'on notera $u(t)$.
2. (a) Montrer que $u(t) \in]0, 1]$.
 (b) Démontrer que $u : t \mapsto u(t)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
 (c) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$.

Indication : calculer $P_t(u(t))$.

3. Montrer que u est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $]0, 1]$ et que sa bijection réciproque est la fonction v définie par :

$$\forall y \in]0, 1], \quad v(y) = \frac{1 - y^3}{y}.$$

4. (a) Justifier que u est continue sur $\mathbb{R}_+$.
 (b) Justifier que u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, une expression de $u'(t)$ en fonction de t et $u(t)$.

Exercice 7. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. Étudier les fonctions f et g (parité, variations, limites).
2. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a :

$$f(x) \geq x.$$

3. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a :

$$g(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

3 Développements limités

Exercice 8. Déterminer un DL à l'ordre 3 en zéro dans chaque cas.

1. $\cos(x) + e^x$,
2. $\sin(x)\sqrt{1+x}$,
3. $\sqrt{1+\sin(x)}$.

Exercice 9. Déterminer les limites en 0 des fonctions suivantes :

- | | |
|--|---|
| 1. $\frac{\sin x - x}{x^3}$; | 3. $\frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2}$; |
| 2. $\frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x}$; | 4. $\frac{\exp(x^2) \cos(2x) - 1}{\sin(x^2) - x^2}$. |

Exercice 10. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x(2 - \cos(x))}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f ce prolongement.
3. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de f en 0.
4. Faire l'étude locale de f en 0 : dérivabilité, tangente et position relative par rapport à sa tangente.