

Mathématiques – Révisions**FONCTIONS, CONTINUITÉ, DÉRIVABILITÉ****1 Limites****Correction de l'exercice 1.**

1. La tentative de calcul naïve de la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$ de $\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ montre qu'il y a une indétermination du type $+\infty \times 0$. Il s'agit de la lever.

(a) Méthode 1. Par la technique des quantités conjuguées, on a, pour $x > 0$,

$$\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

En mettant en facteur, au numérateur et au dénominateur de cette dernière expression, on obtient, pour $x > 0$,

$$\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}$$

Cette dernière expression, par les théorèmes opératoires usuels, a pour limite $\frac{1}{2}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

(b) Méthode 2. On utilise des développements limités. On a pour $x > 0$,

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right)$$

Or, lorsque $x \rightarrow +\infty$, $u = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ et $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u + o(u)$, on a donc, pour $x > 0$,

$$\sqrt{x}(\sqrt{1+x} - \sqrt{x}) = x \cdot \left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right) = \frac{1}{2} + o(1) \rightarrow \frac{1}{2}$$

Cette deuxième méthode est plus robuste et s'applique à un plus grand nombre de cas de figure que la première.

On a donc montré que

$$\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

2. En appliquant la définition de limite (à rappeler) en $\forall \epsilon, \exists A$ avec $\epsilon = \frac{1}{2}$, on obtient l'existence de $A > 0$ tel que

$$\forall x \in [a, +\infty[, 0 \leq \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \leq 1$$

Avec la méthode de la quantité conjuguée, on voit qu'on peut prendre $A = 0$ (non demandé, c'est du travail inutile ici) : On a, pour $x > 0$,

$$0 \leq \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + 1}} \leq 1$$

et l'inégalité cherchée est évidente pour $x = 0$.

Correction de l'exercice 2. à faire

Correction de l'exercice 3.

1. Par équivalent usuel : $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Donc $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$.

2. • En 0. Par équivalent usuel on a :

$$x^3 + x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -1 \quad \text{et} \quad 5x^4 + 2x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x^2.$$

Par compatibilité de la relation d'équivalence avec le quotient alors :

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-1}{2x^2}.$$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2x^2} = -\infty$.

• En $+\infty$. Par équivalent usuel on a :

$$x^3 + x - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^3 \quad \text{et} \quad 5x^4 + 2x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 5x^4.$$

Par compatibilité de la relation d'équivalence avec le quotient alors :

$$g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{5x}.$$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{5x} = 0$.

3. En posant $X = x^2$, on a : $\lim_{x \rightarrow 0} X = 0$. Donc par équivalent usuel :

$$h(x) = e^X - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} X.$$

Ainsi :

$$h(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2.$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$.

4. En posant $X = \frac{1}{x^3}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = 0$. Ainsi par équivalent usuel :

$$i(x) = \sqrt{1+X} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}X = \frac{1}{2x^3}.$$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} i(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^3} = 0$.

5. En posant $X = -x^2$, on a : $\lim_{x \rightarrow 0} X = 0$. Donc par équivalent usuel :

$$e^{-x^2} = e^X - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} X = -x^2.$$

De plus, par équivalent usuel : $x^2 + x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

Par compatibilité de la relation d'équivalence avec le quotient, on obtient :

$$j(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-x^2}{x} = -x.$$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0} j(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$.

6. Soit $x > 0$. En factorisant par le terme dominant au voisinage de $+\infty$ dans le logarithme on obtient :

$$l(x) = \ln \left(x \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) = \ln(x) + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

Maintenant, on factorise par le terme dominant au voisinage de $+\infty$:

$$l(x) = \ln(x) \left(1 + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right).$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1.$$

Ainsi : $l(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} l(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

7. Soit $x > 0$. On a :

$$m(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2 + x}.$$

Par équivalent usuel en $+\infty$ on a : $x^2 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ donc par passage à l'inverse :

$$m(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

8. • En 0^+ : par équivalent usuel on a :

$$x + 1 \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} 1.$$

En factorisant le numérateur par le terme dominant en 0^+ on obtient :

$$\forall x > 0, \quad x - \ln(x) = -\ln(x) \left(1 - \frac{x}{\ln(x)} \right).$$

Or par croissance comparée :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{x}{\ln(x)} = 1.$$

Donc

$$x - \ln(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x).$$

Par compatibilité avec le quotient, on obtient :

$$n(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x).$$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0^+} n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln(x) = +\infty$.

- En $+\infty$: par équivalent usuel on a :

$$x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x.$$

En factorisant le numérateur par le terme dominant en $+\infty$ on obtient :

$$\forall x > 0, \quad x - \ln(x) = x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} \right).$$

Or, par croissance comparée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln(x)}{x} = 1.$$

Donc

$$x - \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x.$$

Par compatibilité avec le quotient, on obtient :

$$n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{x} = 1.$$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} n(x) = 1$.

Correction de l'exercice 4. a faire

2 Continuité et dérivabilité

Correction de l'exercice 5.

1. Il s'agit d'étudier la fonction $f : t \mapsto \ln(\sqrt{t^2 - 1} + t)$, de construire son tableau de variations sur $[1, +\infty[$, de déterminer l'intervalle image J pour pouvoir invoquer le théorème de la bijection.
 - Montrons que f est dérivable sur $]1, +\infty[$. Sur cet intervalle, $t \mapsto t^2 - 1$ est dérivable à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, on en déduit que $t \mapsto \sqrt{t^2 - 1}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$. Enfin, $v : t \mapsto \sqrt{t^2 - 1} + t$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ à valeurs strictement positives donc par composition, f est dérivable sur cet intervalle.
 - De plus, pour tout $t > 1$:

$$f'(t) = \frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{\frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} + 1}{\sqrt{t^2 - 1} + t} = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} > 0.$$

— On en déduit que f est continue, strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

D'après le théorème de la bijection, elle définit une bijection de $[1, +\infty[$ sur $J = [0, \lim_{+\infty} f[= [0, +\infty[$.

2. Pour $y \in J$ comme f est une bijection de $[1, +\infty[$ dans J , il existe un unique $x \geq 1$ tel que $y = f(x)$.

On a

$$\begin{aligned} e^y + e^{-y} &= \sqrt{x^2 - 1} + x + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \frac{(\sqrt{x^2 - 1} + x)^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \\ &= \frac{(x^2 - 1) + 2x\sqrt{x^2 - 1} + x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \\ &= 2x \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 2x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e^y - e^{-y} &= \sqrt{x^2 - 1} + x - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \frac{(\sqrt{x^2 - 1} + x)^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \\ &= \frac{(x^2 - 1) + 2x\sqrt{x^2 - 1} + x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \\ &= 2 \frac{x^2 + x\sqrt{x^2 - 1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 2x \\ &= 2\sqrt{x^2 - 1} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 2\sqrt{x^2 - 1} \end{aligned}$$

3. La fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$, sa dérivée donnée par

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

ne s'y annule pas et donc f^{-1} est $\mathcal{C}^1$ sur $J' =]0, +\infty[$ avec

$$\forall y \in J', (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

On a, si $y = f(x)$, par la question précédente que $x = f^{-1}(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$ et $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \sqrt{x^2 - 1} = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$, tout ceci est cohérent..

Correction de l'exercice 6. Soit $t \geq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $P_t(x) = x^3 + tx - 1$.

1. La fonction P_t est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P'_t(x) = 3x^2 + t \geq 0$$

avec égalité si et seulement si $x = t = 0$.

Ainsi P_t est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (en étudiant les limites en $\pm\infty$).

Par conséquent, il existe un unique réel $u(t)$ tel que $P_t(u(t)) = 0$.

2. (a) On a $P_t(0) = -1 < 0 = P_t(u(t)) \leq P_t(1) = t$.

Par croissance stricte de P_t , on en déduit donc :

$$0 < u(t) \leq 1.$$

- (b) Soient $0 \leq t < s$ et montrons que $u(t) > u(s)$. Pour cela, on va calculer $P_t(u(s))$ et regarder son signe :

$$\begin{aligned} P_t(u(s)) &= u(s)^3 + tu(s) - 1 = u(s)^3 + su(s) - 1 + (t-s)u(s) \\ &= P_s(u(s)) + (t-s)u(s) \\ &= (t-s)u(s) \\ &< 0 = P_t(u(t)). \end{aligned}$$

Comme P_t est strictement croissante, on a donc :

$$u(s) < u(t).$$

- (c) D'après les questions précédentes, u est décroissante et bornée donc par le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

De plus, pour tout $t \geq 0$ on a

$$0 = P_t(u(t)) = u(t)^3 + tu(t) - 1 \quad \text{i.e.} \quad tu(t) = 1 - u(t)^3.$$

Si $\ell \neq 0$, le membre de gauche ci-dessus tend vers $\pm\infty$ alors que le membre de droite tend vers $1 - \ell^3$ ce qui est absurde.

Ainsi $\ell = 0$.

3. Soit $y \in]0, 1]$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$y = u(t) \iff y^3 + ty - 1 = 0 \iff t = \frac{1 - y^3}{y}.$$

Cela montre que u est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $]0, 1]$ et que sa bijection réciproque est la fonction v définie par :

$$\forall y \in]0, 1], \quad v(y) = \frac{1 - y^3}{y}.$$

4. (a) Il est facile de voir que v est continue et strictement décroissante. Le théorème de la bijection assure alors que sa bijection réciproque, à savoir u , est continue sur $\mathbb{R}_+$.
(b) On sait que v est dérivable et que :

$$\forall y \in]0, 1], \quad v'(y) = -\frac{2y^3 + 1}{y^2} < 0.$$

Comme v' ne s'annule pas sur $]0, 1]$, sa bijection réciproque u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \geq 0$:

$$u'(t) = \frac{1}{v'(u(t))} = -\frac{u(t)^2}{2u(t)^3 + 1}.$$

Correction de l'exercice 7. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{et} \quad g(-x) = g(x).$$

Donc la fonction f est impaire et la fonction g est paire.

Elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = g(x) \quad \text{et} \quad g'(x) = f(x).$$

On en déduit g étant strictement positive sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+		
Variations de f	$-\infty$	$0 \nearrow$	$+\infty$

Le tableau ci-dessus permet de trouver le signe de $f = g'$; ainsi :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	-	0	+
Variations de g	$+\infty \searrow$	1	$+\infty \nearrow$

2. Soit $h : x \mapsto f(x) - x$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = f'(x) - 1 = g(x) - 1.$$

Le tableau de variation ci-dessus permet de conclure que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) \geq 0.$$

Ainsi h est croissante et donc :

$$\forall x \geq 0, \quad h(x) \geq h(0) = 0$$

c'est-à-dire

$$\forall x \geq 0, \quad g(x) \geq x.$$

3. Soit $u : x \mapsto g(x) - 1 - \frac{x^2}{2}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u'(x) = g'(x) - x = f(x) - x.$$

La question précédente permet de conclure que :

$$\forall x \geq 0, \quad u'(x) \geq 0.$$

Ainsi u est croissante sur $[0, +\infty[$ et donc :

$$\forall x \geq 0, \quad u(x) \geq u(0) = 0$$

c'est-à-dire

$$g(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

3 Développements limités

Correction de l'exercice 8.

1. On sait que :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \quad \text{et} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3).$$

Ainsi :

$$\cos(x) + e^x = 2 + x + \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

2. On sait que :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \quad \text{et} \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o_{x \rightarrow 0}(x^2).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sin(x)\sqrt{1+x} &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right) \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) \\ &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{8} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{7x^3}{24} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \end{aligned}$$

3. On sait que :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \quad \text{et} \quad \sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o_{u \rightarrow 0}(u^3).$$

Or $\sin(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc on peut composer les équivalent :

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \sin(x)} &= \sqrt{1 + x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)} \\ &= 1 + \frac{x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)}{2} - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right)^2}{8} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right)^3}{16} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{16}\right)x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o_{x \rightarrow 0}(x^3).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 9.

1. Au numérateur, on a une différence de deux termes équivalents en 0. Comme on ne peut pas soustraire les équivalents, on va plutôt utiliser les DL :

$$\begin{aligned}\frac{\sin x - x}{x^3} &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) - x}{x^3} = -\frac{1}{6} + o_{x \rightarrow 0}(1) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

2. Au numérateur et au dénominateur, on a encore une différence de deux termes équivalents en 0. Comme on ne peut pas soustraire les équivalents, on va plutôt utiliser les DL ici aussi :

$$\begin{aligned}\frac{1 + \ln(1 + x) - e^x}{1 - \cos x} &= \frac{1 + x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right)}{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right)} \\ &= \frac{-x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)} \\ &= \frac{-1 + o_{x \rightarrow 0}(1)}{\frac{1}{2} + o_{x \rightarrow 0}(1)} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} -2.\end{aligned}$$

3. On suit la même stratégie pour la même raison :

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1 + x) - \sin(x)}{x^2} &= \frac{x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) - \left(x + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right)}{x^2} = -\frac{1}{2} + o_{x \rightarrow 0}(1) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

4. Toujours pareil.

$$\begin{aligned}
 \frac{\exp(x^2) \cos(2x) - 1}{\sin(x^2) - x^2} &= \frac{\left(1 + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}((2x)^2)\right) - 1}{x^2 - \frac{(x^2)^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}((x^2)^3) - x^2} \\
 &= \frac{\left(1 + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) \left(1 - 2x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) - 1}{-\frac{x^6}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^6)} \\
 &= \frac{1 - x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) - 1}{-\frac{x^6}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^6)} \\
 &= \frac{x^2}{x^6} \times \frac{-1 + o_{x \rightarrow 0}(1)}{-\frac{1}{6} + o_{x \rightarrow 0}(1)} \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{6}{x^4} \\
 &\xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty.
 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 10. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x(2 - \cos(x))}$.

1. Il est évident que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

2. On sait que : $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

On peut donc prolonger continument f en 0 en posant $f(0) = 1$.

3. On a :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)}{x(2 - 1 + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3))} \\
 &= \frac{1 - \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)}{1 + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)} \\
 &= \left(1 - \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right) \\
 &= 1 - \frac{2}{3}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^3).
 \end{aligned}$$

4. Avec le DL en 0 on obtient :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{2}{3}x + o_{x \rightarrow 0}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

La tangente à la courbe de f en 0 est la droite d'équation $y = 1$ et comme :

$$f(x) - 1 = -\frac{2}{3}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \leq 0 \quad \text{au voisinage de 0}$$

alors la courbe de f est localement en-dessous de sa tangente en 0.