Révisions sur les suites réelles

Ce chapitre de révision reprend l'essentiel des chapitres Analyse 1 et Analyse 5 du programme de première année (voir le programme officiel) mais ne se substitue pas aux cours que vous avez eus l'an dernier.

5.1 Généralités sur les suites réelles

Définition 5.1 (Suites réelles)

On appelle suite réelle toute fonction $evisions0 - Suites/Rev0/umsa.fd" evisions0 - Suites/Rev0/umsb.fd" evisions0 - Suites/Rev0/ustmry.fd" u$ définie sur un intervalle d'entier de la forme $[\![n_0, +\infty[\![$ (où $n_0 \in \mathbb{N}$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On adoptera souvent la notation $(u_n)_{n \geq n_0}$ pour désigner u et u_n pour désigner $u(n)$ (le n-ième terme de la suite).

Remarque 5.1.

1. Dans la notation $(u_n)_n$, la variable n est muette : on pourrai écrire $(u_k)_k$ ...
2. Il ne faut pas confondre **la suite** $(u_n)_n$ avec l'un des **termes** u_n. De la même façon, on ne confond pas une **fonction** f avec l'**image** $f(x)$ **d'un élément** x.

Exemple 5.1. Il y a plusieurs façon de définir une suite (liste non exhaustive).

1. De façon explicite. Par exemple : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n^2 - 3n + 1$.
2. Par une relation de récurrence. Par exemple : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n - 2$.
3. De façon implicite. Par exemple : pour tout $n \in \mathbb{N}+$, u_n est l'unique solution dans $[0, 1]$ de l'équation $x^{n+2} - (n + 2)x + 1 = 0$.

Définition 5.2

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.

1. On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **majorée** s'il existe un réel M tel que :
$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq M.$$
2. On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **minorée** s'il existe un réel m tel que :
$$\forall n \geq n_0, \quad m \leq u_n.$$
3. On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **bornée** si elle est majorée et minorée. Cela revient à dire qu'il existe un réel $M \geq 0$ tel que :
$$\forall n \geq n_0, \quad |u_n| \leq M.$$
4. On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **croissante** si :
$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq u_{n+1}.$$
5. On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **décroissante** si :
$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \geq u_{n+1}.$$
6. On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **monotone** si elle est soit croissante soit décroissante.

Remarque 5.2.

1. On peut définir les suites strictement croissantes/décroissantes en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes dans les définitions 4 et 5.
2. Une suite croissante et décroissante est constante.

Définition 5.3 (Opérations)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose :

1. (**somme**) $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$;
2. (**produit**) $(u_n) \times (v_n) = (u_n \cdot v_n)$;
3. (**multiplication par un scalaire**) $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$.

5.2 Limite d'une suite

Définition 5.4

Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. On dit que (u_n) **a pour limite** ℓ lorsque n tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_\varepsilon, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

2. On dit que (u_n) **a pour limite** $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0 \; \exists n_A \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_A, \quad u_n \geq A.$$

3. On dit que (u_n) **a pour limite** $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A < 0 \; \exists n_A \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_A, \quad u_n \leq A.$$

Dans tous les cas ($\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$), lorsqu'elle existe la limite est unique et on note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell.$$

On dit que (u_n) est **convergente** si elle admet une limite finie quand n tend vers $+\infty$. On dit que (u_n) est **divergente** sinon (soit lorsqu'elle admet une limite infinie, soit quand elle n'admet pas de limite).

Théorème 5.0 (Résultats fondamentaux)

1. **Limite et signe :** si une suite (u_n) converge vers un réel strictement positif (resp. strictement négatif) alors à partir d'un certain rang ses termes sont strictement positif (resp. strictement négatif).
2. **Passage à la limite dans les inégalités larges.** Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ alors (sous réserve d'existence) :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n \leq \lim_{n \to +\infty} v_n.$$

   Le résultat s'adapte aux fonctions décroissantes.

3. **Théorème des gendarmes :** soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles.
   — Si (u_n) et (w_n) admettent une même limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ et qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$ alors (v_n) converge aussi vers ℓ.
   — Si (u_n) diverge vers $+\infty$ et qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ alors (v_n) diverge aussi vers $+\infty$.
   — Si (w_n) diverge vers $-\infty$ et qu'à partir d'un certain rang $v_n \leq w_n$ alors (v_n) diverge aussi vers $-\infty$.
4. **Théorème de la limite monotone :** soit (u_n) une suite croissante (resp. décroissante). Alors :
   — soit (u_n) est majorée (resp. minorée) et dans ce cas elle converge ;
   — soit (u_n) est non-majorée (resp. non-minorée) et dans ce cas elle diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Proposition 5.1

Soit $(u_n)_n$ une suite. Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ alors $(u_n)_n$ converge vers ℓ.

5.3 Suites remarquables

5.3.1 Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques

Définition 5.5

Soit (u_n) une suite.

— On dit que (u_n) est **arithmétique de raison** $r \in \mathbb{R}$ si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.

— On dit que (u_n) est **géométrique de raison** $q \in \mathbb{R}$ si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$.

— On dit que (u_n) est **arithmético-géométrique de raison** $q \neq 1$ **et** $r \neq 0$ si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n + r$.

Proposition 5.2

Soit (u_n) une suite.

— Si (u_n) est **arithmétique de raison** $r \in \mathbb{R}$ alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$.

— Si (u_n) est **géométrique de raison** $q \in \mathbb{R}$ alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n u_0$.

Méthode 5.1 (Etude d'une suite arithmético-géométrique)

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique de raison $q \neq 1$ et $r \neq 0$. Pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n :

1. on détermine la solution a de l'équation $x = qx + r$;
2. on montre que $(u_n - a)_n$ est une suite géométrique de raison q ;
3. on en déduit l'expression de $u_n - a$ en fonction de n.

5.3.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 5.6

Une suite $(u_n)_n$ est dite récurrentes linéaires d'ordre 2 s'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Proposition 5.3

Soit $(u_n)_n$ une suite récurrentes linéaires d'ordre 2 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

L'équation $x^2 - ax - b = 0$ est appelée l'**équation caractéristique** de la suite. On note Δ sont discriminant :

$$\Delta = a^2 + 4b.$$

— Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2. Dans ce cas il existe deux réels C et D tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = Cr_1^n + Dr_2^n.$$

— Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une unique solution r_0 . Dans ce cas il existe deux réels C et D tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (C + nD)r_0^n.$$

— Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions complexes conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ avec $r > 0$. Dans ce cas il existe deux réels C et D tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = Cr^n \cos(n\theta) + Dr^n \sin(n\theta).$$

Les constantes C et D se détermine en évaluant en $n = 0$ et $n = 1$.

5.3.3 Suites récurrentes

On s'intéresse donc à des suites (u_n), à valeurs réelles, définies par une relation de récurrence donnée par une fonction, en général explicite, $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Le premier terme u_0 n'est que rarement explicitement donné et, souvent le but est de discuter du comportement asymptotique en fonction du premier terme $u_0 \in D$.
Voici, en une liste relativement ordonnée, les éléments classiques de l'étude.

1. **Bonne définition et intervalles stables.**
   (a) La première difficulté est celle de la bonne définition, due au fait que, de prime abord, l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de f sont distincts.
   (b) On étudie (dérivée, dérivée de la dérivée, etc...jusqu'à obtention du tableau de variation) la fonction f et sa cousine g définie par $g(x) = f(x) - x$ afin de déterminer des intervalles (ou partie de $\mathbb{R}$) I stable par f, *i.e* tels que

   $$f(I) \subset I.$$

   On montre alors par récurrence que si $u_0 \in I$, la suite (u_n) est bien définie et

   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I.$$

   Dans la suite, on ne travaille que sur des intervalles stables habilement choisis, ce qui provoque une distinction de cas.
   L'étude de la fonction g peut aussi aider à déterminer des intervalles intéressants : les points d'annulation de g sont les points fixes de f, et ce peut être habile de prendre des intervalles stables dont une extrémité est un point fixe de f.

2. **Illustration graphique** (manuelle ou informatique). On trace une belle esquisse du graphe de f, (dans un repère orthonormé !), en marquant bien intervalles stables et possibilité de points fixes ainsi que la construction graphique de la suite u. Sur le modèle présenté en figure 5.1 :

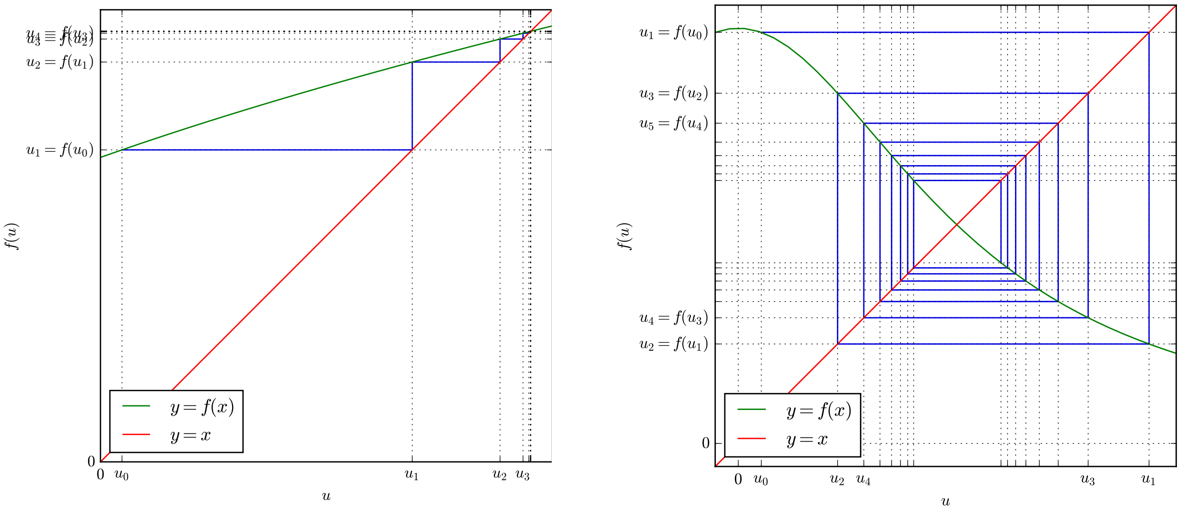

FIGURE 5.1 – Graphiques en escalier (f croissante sur intervalle stable) et en escargot (f décroissante sur intervalle stable).

3. **Points fixes**. Les points fixes de f jouent un grand rôle car
   (a) si ℓ est point fixe de f et si à un (indice) instant n_0, $u_{n_0} = \ell$, alors
   $$\forall n \geq n_0,\ u_n = \ell;$$
   (b) ce sont essentiellement les limites possibles de la suite. En effet, si (u_n) converge vers ℓ et f est continue en ℓ alors
   $$u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad \text{et} \quad f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$$
   et comme on a égalité de ces deux suites, par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$.
4. **Croissance de f et monotonie de** (u_n) (graphiques en escalier). Il reste donc, pour appliquer le point précédent à prouver la convergence de u ce qui s'effectue souvent par le théorème de limite monotone. Pour démontrer la monotonie de (u_n), deux voies sont possibles.
   (a) On travaille sur un intervalle I stable par f sur lequel g ($g(x) = f(x) - x$) garde un signe constant : la suite est monotone car
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I \quad \text{et} \quad u_{n+1} - u_n = g(u_n) \text{ est du signe de } g \text{ sur } I.$$
   (b) La fonction f est croissante sur l'intervalle stable I, par récurrence, à rédiger systématiquement, on démontre que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \text{ est du même signe que } u_1 - u_0.$$
5. **Décroissance de f (graphique en escargot)**. Si f est décroissante sur l'intervalle stable I, on a probablement affaire à un graphique en « escargot ». On étudie et prouve la monotonie des suites extraites portant respectivement les indices pairs et impairs, $v =$

$(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $w = (u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$. Les suites v et w satisfont toutes deux la récurrence associée à la fonction $f \circ f$, pour laquelle I est un intervalle stable. L'avantage est que $f \circ f$ est croissante sur I. On a $w = f(v)$ et $(v_{k+1}) = (f(w_k))$. Sous réserve de continuité ad-hoc de f, si v et w convergent respectivement vers a et b alors a et b sont points fixes de $f \circ f$ dans $\overline{I}$ et on a $a = f(b)$ et $b = f(a)$. On se sert de ces informations pour conclure. On peut remarquer qu'en général un point fixe de f est point fixe de $f \circ f$, ce qui permet de limiter les recherches.

Si on arrive à montrer que v et w convergent respectivement vers a et b avec $a \neq b$, alors u ne converge pas.

6. **Points fixes attractifs, répulsifs et neutres, utilisation du TAF**. Il y a une zoologie des points fixes à laquelle vous pouvez être exposé en introduction dans un problème. On suppose que ℓ est point fixe de f et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle stable I de travail.

   (a) ℓ est dit attractif si $|f'(\ell)| < 1$,

   (b) ℓ est dit répulsif si $|f'(\ell)| > 1$,

   (c) ℓ est dit neutre si $|f'(\ell)| = 1$,

   Cette classification est liée aux résultats suivants (qu'on vous fera redémontrer via le théorème des accroissements finis et par récurrence sur plusieurs questions.)

   (a) Si ℓ est attractif alors il existe un intervalle ouvert $I' \subset I$ contenant ℓ, stable par f et une constante k, $0 \leq |f'(\ell)| < k < 1$ tels que

   $$\forall x, y \in I',\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

   Si $u_0 \in I'$, alors

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$$

   En d'autres termes, si la suite u « tombe » à un instant n_0 dans l'intervalle I', elle y reste ensuite et converge vers ℓ.

   (b) Si ℓ est répulsif alors il existe un intervalle ouvert $I' \subset I$ contenant ℓ, une constante k, $|f'(\ell)| > k > 1$, tels que

   $$\forall x, y \in I',\ |f(x) - f(y)| \geq k|x - y|$$

   On démontre [1] alors, que si u converge vers ℓ, c'est qu'à partir d'un certain indice n_0, la suite u est constamment. égale à ℓ.

   (c) Si ℓ est neutre, on ne sait pas *a priori* ce qu'il se passe..

7. **Autres**.

   (a) En cas de convergence de (u_n) vers une limite ℓ (ou $\pm\infty$), on s'intéresse à la vitesse de convergence (ou de divergence), c'est à dire qu'on cherche un équivalent ou une estimation en termes de suite de référence de $|u_n - \ell|$ (ou de u_n ou de $\dfrac{1}{u_n}$).

   (b) Il y a bien d'autres comportements asymptotiques que la convergence de la suite. Ce sont en général des questions difficiles.

1. ce n'est pas si facile : si u converge vers ℓ, alors pour un certain n_0, on a $\forall n \geq n_0, u_n \in I'$ et donc, par récurrence,

$$\forall n \geq n_0,\ |u_{n+1} - \ell| \geq k|u_n - \ell| \geq k.k^{n-n_0}|u_{n_0} - \ell|,$$

ce qui force l'absurdité $|u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si $u_{n_0} \neq \ell$.

5.3.4 Suites adjacentes

Définition 5.7

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si :

1. l'une est croissante, l'autre décroissante ;
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Proposition 5.4

Deux suites adjacentes convergent, vers une même limite.

Formulaire – Limites

(u_n)	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
$\left(\dfrac{1}{n^a}\right)_n$ **avec** $a > 0$	0
$(q^n)_n$ **avec** $-1 < q < 1$	0
$(q^n)_n$ **avec** $1 < q$	$+\infty$
$(q^n)_n$ **avec** $q \leq -1$	pas de limite

TABLE 5.1 – Limites usuelles

(u_n)	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
$\left(\dfrac{\ln(x))^b}{n^a}\right)_n$ **avec** $a > 0$ **et** $b \in \mathbb{R}$	0
$(n^a q^n)_n$ **avec** $-1 < q < 1$ **et** $a \in \mathbb{R}$	0
$\left(\dfrac{q^n}{n!}\right)_n$ **avec** $q \in \mathbb{R}$	0
$\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)_n$	0

TABLE 5.2 – Croissances comparées

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n + v_n)$	$\lim u_n \times v_n$	$\lim \dfrac{u_n}{v_n}$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\ell + \ell'$	$\ell\ell'$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$
$\ell \neq 0$	0	ℓ	0	$\pm\infty$ $(*)$
0	0	0	0	F.I
$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ $(*)$	0
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I	0
$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ $(*)$	$\pm\infty$ $(*)$
$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	F.I	$\pm\infty$ $(*)$
$+\infty$	$-\infty$	F.I	$-\infty$	F.I
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I

TABLE 5.3 – Opérations sur les limites

- Le symbole $(*)$ signifie que le signe est à étudier selon la règle des signes.
- F.I désigne les formes indéterminées qu'il faut étudier au cas par cas.

Proposition 5.5 (Équivalents usuels)

Les équivalents suivants sont à connaître par cœur. Si (u_n) est une suite convergeant vers 0 alors :

1. $e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;
2. $\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;
3. $\cos(u_n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^2}{2}$;
4. $\ln(1 + u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;
5. $(1 + u_n)^a - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} a u_n$ où $a \neq 0$;
6. $\tan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.