Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

**BCPST2 – Mathématiques**

**DM0**

- ⋆ **À rendre le jour de la rentrée au début de la séance de cours. Aucun délai supplémentaire ne sera accordé.**
- ⋆ **Le devoir doit être rédigé sur des copies doubles. Les résultats doivent être mis en valeur (encadrés ou soulignés par exemple).**

# 1 Échauffements

**Exercice 1.**

1. *Mettre l'expression suivante sous la sous la forme* $a \times q^n$ : $\dfrac{-2^n}{7^n} \times \dfrac{(-3)^n}{5^{2n+1}}$.
2. *Factoriser les expressions suivantes le plus possible.*
   (a) $2x + x^2$,
   (b) $1 - q^3$.

**Exercice 2.** *Résoudre les équations suivantes :*

1. $2e^x + 7 = -5e^x$,
2. $2\ln(x) + 7 = -5\ln(x)$

**Exercice 3.** *Calculer les sommes suivantes.*

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}}{3^{k+1}}$ ;
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

# 2 Analyse

## 2.1 Fonctions

**Exercice 4.** *Déterminer, si elles existent, les limites suivantes.*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\ln(x)$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^3 + x - 2}$,
5. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x)e^x$.

**Exercice 5.** *Pour chaque fonction, déterminer l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée.*

1. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)\cos(x)}{2}$,
2. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\sin(x)}$,
3. $x \mapsto \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$.

**Exercice 6.** *Trouver une primitive des fonctions suivantes :*

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ ;
2. $x \mapsto \dfrac{1}{x}\ln(x)^2$ ;
3. $x \mapsto \dfrac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$ ;
4. $x \mapsto 3xe^{x^2}$.

**Exercice 7.**

1. *On considère la fonction $f$ définie sur $]-1,+\infty[$ par :*
$$\forall x \in ]-1,+\infty[, \quad f(x) = \frac{3}{2}\ln(x+1).$$
*Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha$ dans $[1,2]$. On pourra utiliser le fait que $7 < e^2 < 8$.*
2. *Soit* `eps`*>0. Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il renvoie une valeur approchée de $\alpha$ à* `eps` *près à l'aide de la méthode de dichotomie.*

```
import numpy as np

def approx(eps):
    a = 1
    b = 2
    while _________ :
        c = (a+b)/2
        if 3/2*np.log(c+1) < c :
            _________
        else :
            _________
    return (a+b)/2
```

## 2.2 Suites

**Exercice 8.**

1. *Que peut-on dire d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante et majorée par 2 ? On citera précisément le théorème utilisé.*
2. *Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*
$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = (1-x)^3 + x.$$
*On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0.4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
   (a) i. *Dresser le tableau de variations de $f$.*
   ii. *Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.*
   (b) *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*
   (c) *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.*

**Exercice 9.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par*
$$\begin{cases} u_0 = 2 \text{ et } u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$$
*Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $u_n$ en fonction de $n$.*

## 2.3 Comparaisons et DL

**Exercice 10.** *Déterminer un équivalent simple de chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes.*

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln\left(2 - e^{-\frac{1}{n^2}}\right)$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\ln n + 2}{4n + 1 + 3^n}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt{1 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} - 1$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$.

5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{4n^2+5n+2} - \sqrt{4n^2+n+1}$.

**Exercice 11.** *Déterminer le DL des fonctions suivantes en* $0$.

1. $\forall x \in ]-1,+\infty[,\ a(x) = -x + \ln(1+x)$ *à l'ordre 2.*
2. $\forall x \in ]-1,+\infty[,\ b(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$ *à l'ordre 2.*

**Exercice 12.** *Déterminer, à l'aide d'un DL, un équivalent et la limite en* $0$ *de la fonction* $f$ *définie sur* $]0,+\infty[$ *par :*

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{e^x - 1 - \ln(1+x)}{x^2}.$$

## 3 Probabilités

**Exercice 13.** *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in ]0,1[$.

1. (a) *Rappeler la définition d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres* $n$ *et* $p$*, son espérance et sa variance.*
   (b) *Retrouver l'expression de l'espérance par le calcul.*
2. *On considère une équipe de* $n$ *tireurs à la carabine qui cherchent à atteindre une cible éloignée. Chaque tireur tire deux fois. Pour un tireur donné, la probabilité de toucher la cible au premier tir est* $p$ *et celle de toucher la cible au second tir est aussi égale à* $p$*. On suppose qu'il existe un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *qui modélise cette expérience de sorte que les tireurs et les tirs sont indépendants. On note* $X$ *la variable aléatoire qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible au premier et au deuxième coup et* $Y$ *la variable aléatoire qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible lors d'un seul des deux tirs.*
   (a) *Dans cette question, on considère le cas d'un seul tireur. Quelle est la probabilité de toucher la cible au premier et deuxième tir ?*
   (b) *Déterminer* $X(\Omega)$ *puis reconnaître la loi de* $X$ *(en justifiant soigneusement).*
   (c) *Déterminer de même la loi de* $Y$.
   (d) *Les variables* $X$ *et* $Y$ *sont-elles indépendantes ?*

**Exercice 14.**

1. *Donner la définition d'un système complet d'événements.*
2. *Énoncer la formule des probabilités totales.*
3. *Une information est transmise à l'intérieur d'une population. A chaque étape, avec une probabilité* $q$*, c'est l'information correcte qui est transmise d'une personne à une autre. Avec une probabilité* $1-q$*, c'est l'information contraire qui est transmise. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on note* $I_n$ *l'événement « l'information après* $n$ *transmissions est correcte » et* $p_n = \mathbb{P}(I_n)$.
   (a) *Justifier que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $(I_n, \overline{I}_n)$ *est un système complet d'événements.*
   (b) *En déduire pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *une relation de récurrence entre* $p_{n+1}$ *et* $p_n$.
   (c) *En déduire pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, la valeur de* $p_n$ *en fonction de* $q$ *et de* $n$.

**Exercice 15.**

1. *Rappeler le théorème de transfert.*
2. *Dans chaque cas, calculer* $E(Y)$.
   (a) $Y = n - X$ *où* $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$,
   (b) $Y = 2^X$ *où* $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

# 4 Algèbre

## 4.1 Systèmes linéaires

**Exercice 16.** *Résoudre les systèmes suivants :*

1. $\begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ x+2y+z &= 1 \\ 2x+y+z &= 0 \end{cases}$ ;
2. $\begin{cases} x+y+z-3t &= 1 \\ 2x+y-z+t &= -1 \end{cases}$.

## 4.2 Espaces vectoriels

**Exercice 17.**

1. *Rappeler la définition d'une famille génératrice de* $\mathbb{R}^n$.
2. *Montrer que l'ensemble* $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+y-t=0 \quad \text{et} \quad y=t\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *et trouver une famille génératrice de* $E$.

**Exercice 18.** *Soit* $f$ *l'application de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *définie par :*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (2x-y, y+z, 0).$$

1. *Montrer que* $f$ *est linéaire.*
2. *Déterminer une base de son noyau et une base de son image.*
3. *Est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?*
4. *Déterminer sa matrice dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.
5. (a) *Montrer que la famille* $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$. *On la notera* $\mathcal{B}'$.
   (b) *On note* $\mathcal{B}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$. *Déterminer :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \quad ; \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \quad ; \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},'\mathcal{B}}(f).$$

# 5 Python

**Exercice 19.**

1. *Écrire une fonction Python qui prend en argument un nombre réel* $x$ *et qui renvoie* $2x^3-3x+7$.
2. *En important la bibliothèque* `matplotlib.pyplot`*, écrire les commandes permettant d'afficher le graphe de la fonction* $x \mapsto 2x^3-3x+7$ *sur l'intervalle* $[-1,1]$

**Exercice 20.**

1. *À l'aide d'une boucle* `for`*, écrire une fonction qui prend en argument un entier naturel* $n$ *et renvoie la valeur de la somme* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2^k-k^2)$.
2. *Calculer cette somme à la main.*

**Exercice 21.**

1. *Donner des commandes permettant de construire les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Écrire une commande permettant de remplacer le coefficient* $(1,3)$ *de* $A$ *par 7.*
3. *Écrire une commande permettant d'afficher la première ligne de* $A$ *(sans la recopier à la main...).*