Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

DM0

1 Échauffements

Exercice 1.

1. $\dfrac{-2^n}{7^n} \times \dfrac{(-3)^n}{5^{2n+1}} = \dfrac{-1}{5} \times \left(\dfrac{-6}{175}\right)^n$.
2. (a) $2x + x^2 = x(2+x)$,

   (b) $1 - q^3 = (1-q)(1+q+q^2) = (1-q)(q - \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2})(q - \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2})$.

Exercice 2. *Les ensembles de définition n'étant pas précisés, on a le choix; la plupart d'entre vous a considéré x réel (et certains x complexe pour 2.a)). Je donne les solutions pour x réel.*

1. *Il faudrait $e^x = -1$ donc pas de solution.*
2. $\ln(x) = -1 \iff x = e^{-1}$.

Exercice 3. *Calculer les sommes suivantes.*

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}}{3^{k+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$;
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(n+1)$.

2 Analyse

2.1 Fonctions

Exercice 4.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^3+x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+2)} = \frac{1}{4}$,
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x(1+e^{-x}))}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\ln(1+e^{-x})}{x} = 1$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x)e^x = -\infty$.

Exercice 5. 1. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)\cos(x)}{2}$ *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *(à cause du* $\ln$*) et :*

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{\cos(x) - x\ln(x)\sin(x)}{2x}.$$

2. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\sin(x)}$, *est dérivable sur* $]0,+\infty[\backslash\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ *et :*

$$\forall x \in]0,+\infty[\backslash\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\},\quad f'(x)=\frac{\sin(x)-x\ln(x)\cos(x)}{x\sin^2(x)}.$$

3. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *et :*

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad f'(x)=\frac{\frac{2x}{x^2+1}\times x-\ln(x^2+1)}{x^2}.$$

Exercice 6. *Les primitives sont (C est une constante) :*

1. $x\mapsto \arctan(x)+C$;
2. $x\mapsto \dfrac{\ln(x)^3}{3}+C$;
3. $x\mapsto \ln\left(e^{x^2}+1\right)+C$;
4. $x\mapsto \dfrac{3}{2}e^{x^2}+C$.

Exercice 7.

1. *La fonction* $g : x\mapsto f(x)-x$ *est dérivable (donc continue) sur* $]-1,+\infty[$ *et :*

$$\forall x\in]-1,+\infty[,\quad g'(x)=f'(x)-1=\frac{3}{2(x+1)}-1=\frac{1-2x}{2(x+1)}.$$

Ainsi g' *est strictement négative sur* $[1,2]$ *donc* g *est strictement décroissante sur* $[1,2]$.
D'après le théorème de la bijection, g *réalise une bijection de* $[1,2]$ *sur* $[g(2),g(1)]$. *Il reste à montrer que* $0\in[g(2),g(1)]$ *pour avoir l'existence d'un unique* α *tel que*

$$g(\alpha)=0\quad i.e\quad f(\alpha)=\alpha.$$

Or

$$g(2)=\frac{3}{2}\ln(3)-2\le 0\iff\frac{3}{2}\ln(3)\le 2\iff 3^{\frac{3}{2}}\le e^2\iff\sqrt{27}\le e^2$$

Comme $\sqrt{27}\le 7<e^2$ *alors* $g(2)\le 0$. *De même :*

$$g(1)=\frac{3}{2}\ln(2)-1\ge 0\iff\frac{3}{2}\ln(2)\ge 1\iff 2^{\frac{3}{2}}\le e\iff 2^3\ge e^2$$

Donc $g(1)\ge 0$ *et ce qui précède permet de conclure.*

2. *Soit* `eps`*>0. Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il renvoie une valeur approchée de* α *à* `eps` *près à l'aide de la méthode de dichotomie.*

```
import numpy as np

def approx(eps):
    a = 1
    b = 2
```

```python
    while b-a>eps :
        c = (a+b)/2
        if 3/2*np.log(c+1) < c :
            b = c
        else :
            a = c
    return (a+b)/2
```

2.2 Suites

Exercice 8.

1. *On peut dire, d'après le théorème de convergence monotone, que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge et que sa limite* $\ell \leq 2$*.*
2. *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = (1-x)^3 + x.$$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $u_0 = 0.4$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

(a) i. *La fonction* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$f'(x) = -3(1-x)^2 + 1 = -3x^2 + 6x - 2.$$

Il s'agit d'un polynôme du second degré, donc :

x	$-\infty$		$1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

ii. *En se concentrant sur* $[0,1]$*, le tableau devient :*

x	0		$1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		1
f	1	$\searrow$		$\nearrow$	1

avec :

$$f\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} + 1 - \sqrt{\frac{1}{3}} > 0.$$

Ainsi, $f([0,1]) \subset [0,1]$ *(∗).*

On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$*,* $0 < u_n < 1$*.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$*, soit* $\mathcal{P}(n)$ *la proposition «* $u_n \in]0,1[$ *» et montrons par récurrence que :* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $\mathcal{P}(n)$ *est vraie.*

- *Initialisation : comme* $u_0 = 0.4$*,* $\mathcal{P}(0)$ *est vraie.*

- *Hérédité : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.*
  Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n \in]0,1[$. D'après $(*)$, on a donc :
  $$u_{n+1} = f(u_n) \in]0,1[.$$
  Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion : par le principe de récurrence*
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]0,1[.$$

(b) *Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n < 1$, on a :*
$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = (1-u_n)^3 > 0.$$
Donc $u_{n+1} > u_n$.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
La suite est donc croissante.

(c) *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc elle converge.*
Notons ℓ sa limite.
On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Comme f est continue par passage à la limite on a : $f(\ell) = \ell$.
Or : $f(\ell) = \ell \iff (1-\ell)^3 = 0 \Longleftarrow \ell = 1$.
Ainsi (u_n) converge vers 1.

Exercice 9. *C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est :*
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
dont les solutions sont $x_1 = 4$, $x_2 = 1$. Il existe donc deux réels A et B tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = A \times 4^n + B \times 1^n.$$
On détermine A et B en s'aidant de u_0 et u_1 :
$$\left\{\begin{array}{rcl} 2 = u_0 & = & A+B \\ 3 = u_1 & = & 4A+B \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3A & = & 1 \\ 3 & = & 4A+B \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A & = & \dfrac{1}{3} \\ B & = & \dfrac{5}{3} \end{array}\right.$$
Finalement :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{3}4^n + \frac{5}{3}.$$

2.3 Comparaisons et DL

Exercice 10. *Déterminer un équivalent simple de chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes.*

1. *On a pour $n \in \mathbb{N}^*$:*
$$u_n = \ln\left(1 + 1 - e^{-\frac{1}{n^2}}\right) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} 1 - e^{-\frac{1}{n^2}} = 0.$$

Par équivalent usuel on a :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 - e^{-\frac{1}{n^2}}.$$

Or comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n^2} = 0$ *encore par équivalent usuel :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 - e^{-\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

2. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{3^n}$.
3. *Comme* $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 0$ *par équivalent usuel :*

$$u_n = \sqrt{1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ *par équivalent usuel*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

4. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$
$$u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n}\ln(n)} - 1.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ *(croissance comparée) par équivalent usuel*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}.$$

5. *Ici, on va multiplier par la quantité conjuguée :*

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ u_n &= \sqrt{4n^2+5n+2} - \sqrt{4n^2+n+1} \\
&= \left(\sqrt{4n^2+5n+2} - \sqrt{4n^2+n+1}\right) \times \frac{\sqrt{4n^2+5n+2} + \sqrt{4n^2+n+1}}{\sqrt{4n^2+5n+2} + \sqrt{4n^2+n+1}} \\
&= \frac{4n+1}{\sqrt{4n^2+5n+2} + \sqrt{4n^2+n+1}}.
\end{aligned}$$

Le numérateur est équivalent à $4n$ *par les équivalents usuels.*
Pour le dénominateur, pour tout $n \in \mathbb{N}$ *on a :*

$$\begin{aligned}
\sqrt{4n^2+5n+2} + \sqrt{4n^2+n+1} &= \sqrt{4n^2\left(1+\frac{5}{4n}+\frac{1}{2n^2}\right)} + \sqrt{4n^2\left(1+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n^2}\right)} \\
&= 2n\sqrt{1+\frac{5}{4n}+\frac{1}{2n^2}} + 2n\sqrt{1+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n^2}} \\
&= 2n\left(\sqrt{1+\frac{5}{4n}+\frac{1}{2n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n^2}}\right)
\end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{5}{4n}+\frac{1}{2n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n^2}} = 2$. *Donc, par compatibilité avec le produit, on a :*

$$\sqrt{4n^2+5n+2}+\sqrt{4n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\times 2,$$

puis, par compatibilité avec le quotient :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4n}{2n\times 2}.$$

Ainsi : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

Exercice 11. *Déterminer le DL des fonctions suivantes en* 0.

1. *D'après les DL usuels, on a :*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Par conséquent :

$$a(x) = -x + x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) = -\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

2. *On remarque que :*

$$b(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}} - 1.$$

Donc par DL usuel :

$$b(x) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - 1 = \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Exercice 12. *D'après les DL usuels, on a :*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

et

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} e^x - 1 - \ln(1+x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - 1 - \left(x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\ &= x^2 + \underbrace{\underset{x\to 0}{o}(x^2) - \underset{x\to 0}{o}(x^2)}_{=\underset{x\to 0}{o}(x^2)} \\ &= x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2). \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la caractérisation de la relation d'équivalence, on obtient :

$$e^x - 1 - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2.$$

Par compatibilité des équivalents avec le passage au quotient on obtient :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

3 Probabilités

Exercice 13. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in]0,1[$.

1. (a) *Voir cours.*

   (b) *Soit* X *suivant une loi binomiale de paramètres* n *et* p.

$$\begin{aligned}
E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^{i+1} (1-p)^{n-i-1} \\
&= np\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^{i} (1-p)^{n-1-i} \\
&= np(p+1-p)^n \\
&= np.
\end{aligned}$$

2. (a) *,(b) et (c) On va commencer par étudier la loi de* X. *On considère l'épreuve de Bernoulli dont le succès est l'événement* S *: « le tireur touche deux fois la cible ». Comme les deux tirs d'un tireur sont supposés indépendants, on a :*

$$\begin{aligned}
P(S) &= P\left([\text{atteindre la cible au } 1^{er} \text{ tir}] \cap [\text{atteindre la cible au } 2^{er} \text{ tir}]\right) \\
&= P\left([\text{atteindre la cible au } 1^{er} \text{ tir}]\right) P\left([\text{atteindre la cible au } 2^{er} \text{ tir}]\right) \\
&= p^2.
\end{aligned}$$

Maintenant, si on répète cette épreuve de Bernoulli avec n *tireurs indépendants, la variable* X *compte le nombre de tireurs ayant eu un succès. Ainsi* X *suit la loi* $\mathcal{B}(n, p^2)$.

Étudions maintenant la loi de Y. *On considère l'épreuve de Bernoulli dont le succès est l'événement* S *: « le tireur touche exactement une fois la cible ». Comme les deux tirs d'un tireur sont supposés indépendants, on a :*

$$\begin{aligned}
P(S) &= P\left([\text{atteindre la cible au } 1^{er} \text{ tir}] \cap [\text{rater la cible au } 2^{er} \text{ tir}]\right) \\
&+ P\left([\text{rater la cible au } 1^{er} \text{ tir}]\right) P\left([\text{atteindre la cible au } 2^{er} \text{ tir}]\right) \\
&= p(1-p) + (1-p)p \\
&= 2p(1-p).
\end{aligned}$$

Maintenant, si on répète cette épreuve de Bernoulli avec n *tireurs indépendants, la variable* Y *compte le nombre de tireurs ayant eu un succès. Ainsi* Y *suit la loi* $\mathcal{B}(n, 2p(1-p))$.

(b) *Les événements* $[X = n]$ *et* $[Y = 1]$ *sont incompatibles car il n'y a que* n *tireurs. Donc*

$$P([X = n, Y = 1]) = 0.$$

D'autre part,

$$P([X = n]) = p^{2n} \quad et \quad P([Y = 1]) = n2p(1-p)(1-2p(1-p))^{n-1}.$$

Comme $p \in]0, 1[$, *on obtient donc*

$$P([X = n]) \neq 0 \quad et \quad P([Y = 1]) \neq 0$$

et par conséquent,

$$P([X = n]) P([Y = 1]) \neq P([X = n, Y = 1]).$$

Ainsi X *et* Y *ne sont pas indépendantes.*

Exercice 14.

1. *Voir cours.*
2. *Voir cours.*
3. *Une information est transmise à l'intérieur d'une population. A chaque étape, avec une probabilité* q*, c'est l'information correcte qui est transmise d'une personne à une autre. Avec une probabilité* $1 - q$*, c'est l'information contraire qui est transmise. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on note* I_n *l'événement « l'information après* n *transmissions est correcte » et* $p_n = P(I_n)$.

   (a) *Soit* $n \in \mathbb{N}$*, par définition du complémentaire, on a (en notant* Ω *l'univers) :*

   $$I_n \cup \overline{I}_n = \Omega \quad et \quad I_n \cap \overline{I}_n = \emptyset.$$

   Donc $(I_n, \overline{I}_n)$ *est un système complet d'événements.*

   (b) *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *D'après la formule des probabilités totales :*

   $$\begin{aligned} p_{n+1} = P(I_{n+1}) &= P_{I_n}(I_{n+1})P(I_n) + P_{\overline{I}_n}(I_{n+1})P(\overline{I}_n) \\ &= q \times p_n + (1-q) \times (1-p_n) \\ &= (2q-1)p_n + 1 - q \end{aligned}$$

   (c) *On en déduit que* $(p_n)_n$ *est une suite arithmético-géométrique.*
   Le point fixe de la fonction associée est $\dfrac{1}{2}$ *et on vérifie que la suite* $(p_n - \dfrac{1}{2})_n$ *est géométrique de raison* $2q - 1$. *On en déduit :*

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = (2q-1)^n(u_0 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2q-1)^n + \frac{1}{2}.$$

Exercice 15.

1. *Voir cours.*
2. *Dans chaque cas, calculer* $E(Y)$.

   (a) *Par linéarité :*

   $$E(Y) = E(n - X) = n - E(X) = n - np.$$

(b) *Par le théorème de transfert :*

$$\begin{aligned}
E(Y) = E(2^X) = \sum_{k=0}^{n} 2^k P(X=k) &= \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2p)^k (1-p)^{n-k} \\
&= (2p+1-p)^n \\
&= (p+1)^n.
\end{aligned}$$

4 Algèbre

4.1 Systèmes linéaires

Exercice 16.

1. *On trouve* $(x,y,z) = (-1,0,2)$.
2. *On trouve comme ensemble de solution :* $\{(x, t - \frac{3}{2}x, 1 + 2t + \frac{x}{2}, t) \ ; \ x, t \in \mathbb{R}\}$.

4.2 Espaces vectoriels

Exercice 17.

1. *Voir cours.*
2. *On a :*

$$\begin{aligned}
E &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - t = 0 \quad et \quad y = t\right\} \\
&= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x = 0 \quad et \quad y = t\right\} \\
&= \left\{(0,t,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ t, z \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{z(0,0,1,0) + t(0,1,0,1) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ t, z \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \mathrm{Vect}((0,0,1,0),(0,1,0,1)).
\end{aligned}$$

Ainsi E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *et* $((0,0,1,0),(0,1,0,1))$ *est une famille génératrice de* E.

Exercice 18. *Soit* f *l'application de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *définie par :*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (2x - y, y + z, 0).$$

1. *Soit* $(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On a :*

$$\begin{aligned}
f((x,y,z) + \lambda(x',y',z')) &= f(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') \\
&= (2(x + \lambda x') - (y + \lambda y'), y + \lambda y' + z + \lambda z', 0) \\
&= (2x - y, y + z, 0) + \lambda(2x' - y', y' + z', 0) \\
&= f(x,y,z) + \lambda f(x',y',z')
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f((x,y,z) + \lambda(x',y',z')) = f(x,y,z) + \lambda f(x',y',z').$$

Donc f *est linéaire.*

2. *Pour le noyau : soit* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \in \ker(f) \iff f(x,y,z) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y & = & 0 \\ y + z & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 2x \\ z & = & -2x \end{array} \right.$$

Donc : $\ker(f) = \{(x, 2x, -2x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,2,-2))$.
Pour l'image, puisque $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *:*

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) &= \mathrm{Vect}((2,0,0),(-1,1,0),(0,1,0)) \\ &= \mathrm{Vect}((2,0,0),(0,1,0))\end{aligned}$$

car $(-1,1,0) = (0,1,0) - \dfrac{1}{2}(2,0,0)$.
La famille $((2,0,0),(0,1,0))$ *est génératrice de* $\mathrm{Im}(f)$*. De plus, elle est formée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre. C'est donc une base de* $\mathrm{Im}(f)$.

3. *Son noyau n'est pas réduit au vecteur nul donc elle n'est pas injective.*
Son image n'est pas égale à $\mathbb{R}^3$ *(car de dimension 2 d'après la question précédente) donc elle n'est pas surjective.*
Elle n'est donc pas bijective non plus.

4. *Pour déterminer sa matrice dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *:*
   — *On calcule les images des vecteurs de la base canonique :*
   $$f(1,0,0) = (2,0,0) \quad ; \quad f(0,1,0) = (-1,1,0) \quad ; \quad f(0,0,1) = (0,1,0).$$
   — *On détermine les coordonnées de chacune des trois images dans la base canonique.*
   — *La matrice donc les colonnes sont les coordonnées de chacun de ces trois images dans la base canonique est la matrice voulue :*
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. (a) *Montrer que la famille* $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ *est libre : soit* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. *On a*
   $$\lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,1,0) + \lambda_3(1,0,0) = (0,0,0) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & = & 0 \end{array} \right.$$
   La famille $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ *est donc libre.*
   De plus, elle est formée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathbb{R}^3$ *est de dimension 3. Par conséquent, c'est une base de* $\mathbb{R}^3$.

   (b) i. *Pour déterminer la matrice* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ *:*
   — *On calcule les images des vecteurs de la base* $\mathcal{B}'$ *:*
   $$f(1,1,1) = (1,2,0) \quad ; \quad f(1,1,0) = (1,1,0) \quad ; \quad f(1,0,0) = (2,0,0).$$

— *On détermine les coordonnées de chacune des trois images dans la base* $\mathcal{B}'$.

Les coordonnées de $f(1,1,1) = (1,2,0)$ *dans la base* $\mathcal{B}'$ *sont* $(0,2,-1)$ *car*

$$(1,2,0) = 0 \times (1,1,1) + 2 \times (1,1,0) - (1,0,0).$$

Les coordonnées de $f(1,1,0) = (1,1,0)$ *dans la base* $\mathcal{B}'$ *sont* $(0,1,0)$ *car*

$$(1,1,0) = 0 \times (1,1,1) + (1,1,0) + 0 \times (1,0,0).$$

Les coordonnées de $f(1,0,0) = (2,0,0)$ *dans la base* $\mathcal{B}'$ *sont* $(0,0,2)$ *car*

$$(2,0,0) = 0 \times (1,1,1) + 0 \times (1,1,0) + 2 \times (1,0,0).$$

— *La matrice donc les colonnes sont les coordonnées de chacun de ces trois images dans la base* $\mathcal{B}'$ *est la matrice voulue :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

ii. Pour déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ *:*

— *On calcule les images des vecteurs de la base* $\mathcal{B}$ *:*

$$f(1,0,0) = (2,0,0) \quad ; \quad f(0,1,0) = (-1,1,0) \quad ; \quad f(0,0,1) = (0,1,0).$$

— *On détermine les coordonnées de chacune des trois images dans la base* $\mathcal{B}'$.

Les coordonnées de $f(1,0,0) = (2,0,0)$ *dans la base* $\mathcal{B}'$ *sont* $(0,0,2)$ *car*

$$(2,0,0) = 0 \times (1,1,1) + 0 \times (1,1,0) + 2 \times (1,0,0).$$

Les coordonnées de $f(0,1,0) = (-1,1,0)$ *dans la base* $\mathcal{B}'$ *sont* $(0,1,-2)$ *car*

$$(-1,1,0) = 0 \times (1,1,1) + (1,1,0) - 2 \times (1,0,0).$$

Les coordonnées de $f(0,0,1) = (0,1,0)$ *dans la base* $\mathcal{B}'$ *sont* $(0,1,-1)$ *car*

$$(0,1,0) = 0 \times (1,1,1) + (1,1,0) - (1,0,0).$$

— *La matrice donc les colonnes sont les coordonnées de chacun de ces trois images dans la base* $\mathcal{B}'$ *est la matrice voulue :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

iii. Pour déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ *:*

— *On calcule les images des vecteurs de la base* $\mathcal{B}'$ *:*

$$f(1,1,1) = (1,2,0) \quad ; \quad f(1,1,0) = (1,1,0) \quad ; \quad f(1,0,0) = (2,0,0).$$

— *On détermine les coordonnées de chacune des trois images dans la base $\mathcal{B}$.*
Les coordonnées de $f(1,1,1) = (1,2,0)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(1,2,0)$.
Les coordonnées de $f(1,1,0) = (1,1,0)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(1,1,0)$.
Les coordonnées de $f(1,0,0) = (2,0,0)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(2,0,0)$.

— *La matrice donc les colonnes sont les coordonnées de chacun de ces trois images dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice voulue :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5 Python

Exercice 19.

1. *Écrire une fonction Python qui prend en argument un nombre réel x et qui renvoie $2x^3 - 3x + 7$.*

```
def f(x):
        return 2*x**3-3*x+7
```

2. *En important la bibliothèque* `matplotlib.pyplot`*, écrire les commandes permettant d'afficher le graphe de la fonction $x \mapsto 2x^3 - 3x + 7$ sur l'intervalle $[-1,1]$*

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

X = np.linspace(-1,1,100)
Y = f(X)
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

Exercice 20.

1. *À l'aide d'une boucle* `for`*, écrire une fonction qui prend en argument un entier naturel n et renvoie la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n}(2^k - k^2)$.*

```
def S(n):
        S = 0
        for k in range(n+1):
                S = S + 2**k-k**2
        return S
```

2. *Calculer cette somme à la main :*

$$\sum_{k=0}^{n}(2^k - k^2) = \sum_{k=0}^{n} 2^k - \sum_{k=0}^{n} k^2 = 2^{n+1} - 1 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 21.

```
# avec des listes de listes

A = [[1,1,0],[1,2,3],[0,1,0]]
B = [[0,0,0],[0,0,0],[0,0,0]]
A[0][2]=7
print(A[0])
# avec des tableaux numpy

A = np.array([[1,1,0],[1,2,3],[0,1,0]])
B = np.zeros([3,3])
A[0,2]=7
print(A[0,:])
```