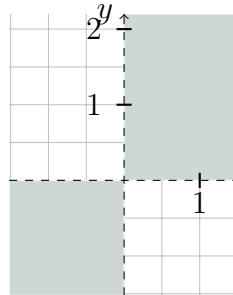


Mathématiques – TD1**FONCTIONS DE DEUX VARIABLES**

Correction de l'exercice 1. 1. La fonction f est définie en (x, y) si et seulement si xy est strictement positif (pour que $\ln(xy)$ existe) c'est-à-dire si et seulement si " $x > 0$ et $y > 0$ " ou " $x < 0$ et $y < 0$ ".



2. La fonction g est définie en (x, y) si et seulement si $9 - x^2 - y^2$ est positif c'est-à-dire si et seulement si " $x^2 + y^2 \leq 9$ ". L'ensemble de définition de g est donc la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon 3.

Correction de l'exercice 2.

1. La ligne de niveau -1 de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 - 4x + 4 + y^2 - 5$ est l'ensemble :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + 4 + y^2 - 5 = -1\}.$$

Or on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 + y^2 - 5 = -1 &\iff x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4 \iff (x - 2)^2 + y^2 = 4 \\ &\iff \|(x, y) - (2, 0)\| = 2. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + 4 + y^2 - 5 = -1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (2, 0)\| = 2\}.$$

La ligne de niveau -1 de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 - 4x + 4 + y^2 - 5$ est donc le cercle de centre $(2, 0)$ et de rayon 2.

2. La ligne de niveau 0 de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 y^2$ est l'ensemble :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 y^2 = 0\}.$$

Or on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x^2 y^2 = 0 \iff x^2 = 0 \text{ ou } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } y = 0.$$

Ainsi on obtient :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 y^2 = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}.$$

La ligne de niveau 0 de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 y^2$ est donc la réunion des droites d'équation $y = 0$ et $x = 0$.

Correction de l'exercice 3. Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^2 sur un pavé ouvert à préciser et calculer les dérivées partielles d'ordre 2.

1. La fonction f_1 est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (en particulier, elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$). De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) &= 3x^2y^3 + 6xy - 2y^2 + 1 \quad ; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 3x^3y^2 + 3x^2 - 4yx; \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x, y) &= 6xy^3 + 6y \quad ; \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x, y) = 6x^3y - 4x; \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}(x, y) = 9x^2y^2 + 6x - 4y.\end{aligned}$$

2. La fonction f_2 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que composée de fonctions de classe C^2 .

De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) &= -3y \sin(3xy - y + 1) \quad ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = -(3x - 1) \sin(3xy - y + 1); \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x, y) &= -9y^2 \cos(3xy - y + 1) \quad ; \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x, y) = -(3x - 1)^2 \cos(3xy - y + 1); \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}(x, y) = 3(1 - 3x)y \cos(3xy - y + 1) - 3 \sin(3xy - y + 1).\end{aligned}$$

3. La fonction f_3 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que composée de fonctions de classe C^2 .

De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{1 + (x + 2y)^2} \quad ; \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y) = \frac{2}{1 + (x + 2y)^2}; \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}(x, y) &= -\frac{2(x + 2y)}{(1 + (x + 2y)^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{8(x + 2y)}{(1 + (x + 2y)^2)^2}; \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{4(x + 2y)}{(1 + (x + 2y)^2)^2}.\end{aligned}$$

4. La fonction $(x, y) \mapsto x$ est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. La fonction logarithme étant de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit par composition que $(x, y) \mapsto \ln(x)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Par ailleurs, la fonction $(x, y) \mapsto x + y^2$ est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Ainsi par somme puis produit de fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, la fonction f_4 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

De plus pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_4}{\partial x}(x, y) &= \ln(x) + x + y^2 + x \left(\frac{1}{x} + 1 \right) = \ln(x) + 2x + y^2 + 1 \quad ; \quad \frac{\partial f_4}{\partial y}(x, y) = 2yx \\ \frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{1}{x} + 2 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f_4}{\partial y^2}(x, y) = 2x \\ \frac{\partial^2 f_4}{\partial x \partial y}(x, y) &= 2y = \frac{\partial^2 f_4}{\partial y \partial x}(x, y) \quad \text{d'après le théorème de Schwarz.}\end{aligned}$$

5. La fonction $(x, y) \mapsto x$ est polynomiale donc est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]1, +\infty[$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[\times]1, +\infty[$. La fonction racine carrée étant de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, on en déduit par composition que $(x, y) \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]1, +\infty[$.

La fonction $(x, y) \mapsto y$ est polynomiale donc est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]1, +\infty[$ et à valeurs dans $]1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[\times]1, +\infty[$. La fonction logarithme étant de classe C^2 sur $]1, +\infty[$ et ne s'y annulant pas, on en déduit par composition que $(x, y) \mapsto \ln(y)$ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]1, +\infty[$.

Par quotient, f_5 est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]1, +\infty[$.

De même, elle est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]0, 1[$.

De plus pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[\times]1, +\infty[$ et tout $(x, y) \in]0, +\infty[\times]0, 1[$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_5}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{2\sqrt{x} \ln(y)} \quad ; \quad \frac{\partial f_5}{\partial y}(x, y) = -\frac{\sqrt{x}}{y \ln(y)^2}; \\ \frac{\partial^2 f_5}{\partial x^2}(x, y) &= -\frac{1}{4x\sqrt{x} \ln(y)} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f_5}{\partial y^2}(x, y) = \sqrt{x} \frac{\ln(y) + 2}{y^2 \ln(y)^3} \\ \frac{\partial^2 f_5}{\partial x \partial y}(x, y) &= -\frac{1}{2y\sqrt{x} \ln(y)^2} = \frac{\partial^2 f_5}{\partial y \partial x}(x, y) \quad \text{d'après le théorème de Schwarz.} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

1. La fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est polynomiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. De plus, la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc par composition $(x, y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Finalement, par produit, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2xe^{-(x^2+y^2)} - 2x(x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 2xe^{-(x^2+y^2)}(1 - x^2 - y^2); \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2ye^{-(x^2+y^2)} - 2y(x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 2ye^{-(x^2+y^2)}(1 - x^2 - y^2). \end{aligned}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} 2xe^{-(x^2+y^2)}(1 - x^2 - y^2) = 0 \\ 2ye^{-(x^2+y^2)}(1 - x^2 - y^2) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x(1 - x^2 - y^2) = 0 \\ y(1 - x^2 - y^2) = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y(1 - x^2 - y^2) = 0 \end{cases} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 = 0 \\ y(1 - x^2 - y^2) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 0 \\ 1 - x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad 1 - x^2 - y^2 = 0 \\ &\iff (x, y) \in \{(0, 0)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des points critiques est :

$$\{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

3. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a ;

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x};$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	0	-
Variations de $g(x)$	0	e^{-1}	0

En particulier on a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(0) = 0 \leq g(x) \leq e^{-1} = g(1).$$

Or, on remarque que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = g(x^2 + y^2)$. Ainsi :

- pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$f(x,y) = g(x^2 + y^2) \geq g(0) = f(0,0)$$

et f possède donc un minimum global en $(0,0)$;

- soit (x_0, y_0) tel que $x_0^2 + y_0^2 = 1$ alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$f(x,y) = g(x^2 + y^2) \leq g(1) = g(x_0^2 + y_0^2) = f(x_0, y_0)$$

et f possède donc un maximum global en (x_0, y_0) .

Correction de l'exercice 5.

- (a) La fonction f est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x + 2y - 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y + 2x - 1.$$

- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} 4x + 2y - 1 = 0 \\ 4y + 2x - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x - 1 = 0 \\ 4y + 2x - 1 = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{6} \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi le seul point critique de f est A et $f(A) = -\frac{1}{6}$.

2. (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} 2 \left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(y - \frac{1}{6} \right)^2 &= 2 \left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{1}{16} + xy - \frac{x}{2} - \frac{y}{4} \right) + \frac{3}{2} \left(y^2 - \frac{y}{3} + \frac{1}{36} \right) \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. D'après la question précédente on a :

$$0 \leq 2 \left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(y - \frac{1}{6} \right)^2 = f(x, y) + \frac{1}{6}.$$

On en déduit donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) \geq -\frac{1}{6} = m.$$

Ainsi m est le minimum global de f .

3. (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a d'après 3.b :

$$g(x, y) = f(e^x, e^y) \geq -\frac{1}{6}.$$

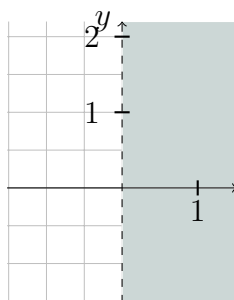
(b) En particulier :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) \geq -\frac{1}{6} = f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = g(-\ln(6), -\ln(6)).$$

Ainsi g possède un minimum global en $(-\ln(6), -\ln(6))$ qui vaut $-\frac{1}{6}$.

Correction de l'exercice 6. Soit $f : (x, y) \mapsto x^y - x$.

1. On remarque que $x^y = e^{y \ln(x)}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:



2. La fonction $(x, y) \mapsto x$ est polynomiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction logarithme est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, la fonction $(x, y) \mapsto \ln(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Par produit $(x, y) \mapsto y \ln(x)$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ puis par composition avec l'exponentielle $(x, y) \mapsto e^{y \ln(x)}$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Finalement, par somme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Calculons ses dérivées partielles d'ordre 1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1} - 1 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \ln(x)x^y.$$

Déterminons les points critiques : soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \nabla(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} yx^{y-1} - 1 = 0 \\ \ln(x)x^y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} yx^{y-1} - 1 = 0 \\ \ln(x) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi f possède un unique point critique : $(1, 1)$.

3. Soit $h > 0$. On a

$$\begin{aligned} f(1+h, 1-h) &= e^{(1-h)\ln(1+h)} - 1 - h \\ &= e^{(1-h)(h-\frac{h^2}{2}+o_{h \rightarrow 0}(h^2))} - 1 - h \\ &= e^{h-\frac{3}{2}h^2+o_{h \rightarrow 0}(h^2)} - 1 - h \\ &= 1 + (h - \frac{3}{2}h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2)) + \frac{1}{2}(h - \frac{3}{2}h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2))^2 - 1 - h \\ &= -h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \end{aligned}$$

4. De même pour $h > 0$:

$$\begin{aligned} f(1+h, 1+h) &= e^{(1+h)\ln(1+h)} - 1 - h \\ &= e^{(1+h)(h-\frac{h^2}{2}+o_{h \rightarrow 0}(h^2))} - 1 - h \\ &= e^{h+\frac{1}{2}h^2+o_{h \rightarrow 0}(h^2)} - 1 - h \\ &= 1 + (h + \frac{1}{2}h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2)) + \frac{1}{2}(h + \frac{1}{2}h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2))^2 - 1 - h \\ &= h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $h > 0$ suffisamment proche de 0 on a :

$$f(1+h, 1-h) < 0 = f(1, 1).$$

En particulier, tout pavé ouvert contenant $(1, 1)$ contient un élément dont l'image est strictement inférieure à $f(1, 1)$: ainsi f n'admet pas de minimum local en $(1, 1)$.

De la même façon, pour tout $h > 0$ suffisamment proche de 0 on a :

$$f(1+h, 1+h) > 0 = f(1, 1).$$

En particulier, tout pavé ouvert contenant $(1, 1)$ contient un élément dont l'image est strictement supérieure à $f(1, 1)$: ainsi f n'admet pas de maximum local en $(1, 1)$.

Correction de l'exercice 7. Soit f une fonction C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et α, β des nombres réels non nuls. On pose pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$g(u, v) = f(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v).$$

1. (a) Soit $v \in \mathbb{R}$. D'après la formule de dérivation des fonctions composées on sait que la fonction partielle $g_v : u \mapsto f(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est :

$$u \mapsto \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v) + \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v).$$

Ainsi :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v) + \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v).$$

De même, on trouve :

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \beta \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v) - \beta \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v).$$

- (b) On procède de même pour les dérivées partielles d'ordre 2. Si on fixe $v \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v)$ est la dérivée en u de la fonction partielle :

$$u \mapsto \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v) + \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v).$$

La formule de dérivation des composées donne alors, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) &= \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v) + \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v) \\ &\quad + \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v) + \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v) \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) &= \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v) - \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v) \\ &\quad - \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v) + \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v) \end{aligned}$$

2. On peut maintenant simplifier (on utilise le théorème de Schwarz sur l'égalité des dérivées secondes croisées) : pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) - \beta^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) = -4\alpha^2 \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v).$$

Résoudre l'équation d'inconnue $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha^2 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) - \beta^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) = 0$$

revient donc à résoudre l'équation d'inconnue $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v) = 0.$$

Or la transformation linéaire $(u, v) \mapsto (x, y) = (\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v)$ étant bijective de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même (son déterminant est $\alpha^2 + \beta^2 > 0$), cela revient à résoudre l'équation d'inconnue $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0.$$

On peut résoudre ceci par double primitivation : comme, à y fixé, la fonction partielle de la dérivée partielle $x \mapsto \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y)$ est nulle, on en déduit qu'il existe $f(y)$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(y).$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial y}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et la fonction f ainsi définie est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

En fixant x , on peut maintenant, en primitivant f en F , affirmer l'existence de $G(x)$ tel que

$$\forall y \in \mathbb{R}, f(x, y) = F(y) + G(x)$$

Comme $x \mapsto f(x, y)$ est C^2 sur $\mathbb{R}$, G l'est aussi. On a donc résolu (analyse) :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$

en : il existe $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = F(y) + G(x).$$

On peut vérifier (synthèse) que les fonctions de ce type sont évidemment solutions de problème.

On peut maintenant revenir en les variables (u, v) :

La fonction $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ vérifie :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \alpha^2 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) - \beta^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) = 0$$

si et seulement si il existe deux fonctions F et G , C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, g(u, v) = F(\alpha u - \beta v) + G(\alpha u + \beta v).$$

Correction de l'exercice 8.

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0), \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

— Fixons $y \neq 0$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

et donc en primitivant (y étant entendu fixé), on obtient l'existence d'une constante $C(y)$ (c'est une constante par rapport à x mais elle dépend de y vu qu'on travaille à y fixé) telle que

$$\forall y \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + C(y).$$

— À x fixé maintenant, la fonction $C : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall y \neq 0, C(y) = f(x, y) - \sqrt{x^2 + y^2}$$

est de classe C^1 sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et sur chacun d'entre eux,

$$C'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) = 0.$$

On en déduit que $C(y)$ est constante sur chacun des intervalles et donc on vient de démontrer l'existence de deux constantes C_- et C_+ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + C_+$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y < 0, f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + C_-$$

— En fixant $x \neq 0$ et en faisant tendre y vers 0^+ puis 0^- , on obtient que $C_+ = C_-$, constante que l'on a noté C et que l'on a (continuité par rapport à y à x fixé) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + C$$

Voilà qui clos notre analyse.

— Pour la synthèse, on constate que quelle que soit la constante C , la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0), f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + C$$

vérifie les propriétés demandées.

2. Une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant le système est en particulier une fonction $\mathcal{C}^1$ vérifiant le système.

On vérifie alors que toutes les fonctions précédemment obtenues sont de classe $\mathcal{C}^2$. Donc rien ne change vraiment...

Plus drôle : trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0), \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

Indication : Schwarz