Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2025-2026

BCPST2 – Mathématiques

DS1- 3H00

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\sqrt{1+2x} - (1+3x)^{\frac{1}{3}}}{x^2}.$$

1. **(a)** Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+2x} - (1+3x)^{\frac{1}{3}}$.
   (b) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0. On précisera la valeur du prolongement en 0.
2. Étudier la dérivabilité en 0 du prolongement.

Exercice 2

Soient p et q deux réels appartenant à l'intervalle $]0,1[$.
On considère un chat domestique dont le propriétaire quitte chaque matin la maison et ne rentre que le soir. Chaque jour, à l'instant du départ de son propriétaire, le chat est confronté à un choix : ou bien rester à la maison ; ou bien décider de passer la journée dehors.
Les ouvertures de la maison étant toutes closes, et la porte d'entrée de la maison ne disposant pas de chatière, le chat devra passer sa journée soit entièrement à l'intérieur, soit entièrement à l'extérieur de la maison.
On se rend compte que, lorsque le chat choisit de rester à l'intérieur de la maison un jour donné, la probabilité qu'il choisisse de rester de nouveau à la maison le lendemain est égale à p. Lorsque le chat passe la journée dehors, la probabilité qu'il décide de rester dans la maison le lendemain vaut q.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les évènements A_n et B_n suivants :

- A_n : « le chat reste à la maison le n-ème jour » ;
- B_n : « le chat passe la journée dehors le n-ème jour ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$a_n = P(A_n) \quad \text{et} \quad b_n = P(B_n).$$

On suppose qu'au premier jour le chat choisit de passer la journée dehors, ainsi $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$.

1. **(a)** Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (A_n, B_n) est un système complets d'événements.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir une relation de récurrence reliant a_{n+1} à a_n.

2. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de a_n en fonction de n.

3. Étudier la convergence de la suite $(a_n)_n$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose X_n la variable aléatoire valant 1 si le chat est resté à l'intérieur de n-ième jour et 0 sinon et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, reconnaître la loi de X_n et donner son espérance, sa variance.

(b) Que représente S_n pour le chat ?

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ calculer $E(S_n)$ et donner un équivalent le plus simple possible.

Problème

Soit $\alpha > 0$ un réel fixé. On s'intéresse dans ce problème à la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 \geq 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = \alpha\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right).$$

On considère la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \alpha\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Partie 1 – Généralités

1. Dresser le tableau de variation de f_α (on précisera les limites aux bornes et la valeur des éventuels extrema).

2. Sur le graphique en annexe, on a représenté les courbes représentatives de f_α pour $\alpha \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 2\right\}$.

(a) Préciser pour chaque courbe la valeur de α correspondante.

(b) Compléter le graphique de façon à visualiser les premiers termes des 5 suites obtenues pour chaque valeur de α.

Pour $\alpha \in \left\{\frac{3}{4}, 2\right\}$ on prendra $u_0 = 1$ et pour $\alpha \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ on prendra $u_0 = 4$.

(c) Pour chacune des suites, conjecturer le comportement (variations, limite éventuelle).

3. Soit $\alpha > 0$ quelconque.

(a) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

(b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq 2\alpha$.

(c) On suppose que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers un réel ℓ.
Montrer qu'alors $\alpha < 1$ et déterminer ℓ en fonction de α.

(d) Que peut-on déduire pour la convergence de la suite dans les cas où $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$?

Partie 2 – Cas $\alpha = \frac{3}{4}$.

On suppose dans cette partie que $\alpha = \dfrac{3}{4}$ et que $u_0 = 1$.

4. Calculer u_1 puis montrer par récurrence que : $\forall n \geq 0, \quad u_n \leq u_{n+1}$.

5. Montrer que : $\forall n \geq 0, \quad u_n \leq \sqrt{3}$.

6. Conclure sur la convergence de la suite et, le cas échéant, donner sa limite.

Partie 3 – Cas $\alpha = \frac{1}{2}$.

On suppose dans cette partie que $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

7. Que peut-on dire de la suite dans le cas où $u_0 = 1$?

On suppose dans le reste de la partie 3, que $u_0 > 1$.

8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

9. On pose, pour tout $n \geq 0$, $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}\right)$.

(a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique et exprimer v_n en fonction de n et de v_0.

(b) Déterminer la limite de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

(c) Exprimer u_n en fonction de v_n et en déduire la convergence de $(u_n)_{n\geq 0}$. On précisera, le cas échéant, la valeur de la limite.

Partie 4 – Cas $\alpha = \frac{1}{4}$.

Dans cette partie, on reprend l'hypothèse $u_0 \geq 1$.

10. Montrer que pour tout $x \geq \dfrac{1}{2}$ on a :

$$-\frac{3}{4} \leq f'_\alpha(x) \leq \frac{1}{4}.$$

11. On pose $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

(a) Rappeler l'énoncé de la formule des accroissements finis.

(b) Montrer que pour tout $n \geq 0$: $|u_{n+1} - \beta| \leq \dfrac{3}{4}|u_n - \beta|$.

12. **(a)** En déduire qu'il existe une constante C, que l'on exprimera en fonction de u_0 et β telle que :

$$\forall n \geq 0, \quad |u_n - \beta| \leq C\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

(b) Conclure quant à la convergence de $(u_n)_{n\geq 0}$ dans ce cas.

Partie 5 – Cas $\alpha = 2$.

Dans cette section, on suppose que $u_0 > 1$.

13. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et que sa limite vaut $+\infty$.

14. En déduite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \dfrac{u_n}{2^n}$.

15. Montrer : $\forall n \geq 0,\ 0 \leq w_{n+1} - w_n \leq \dfrac{1}{2^n}$.

Indication : on pourra utiliser la question 3.(b).

16. Montrer que la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n}(w_{k+1} - w_k)\right)_{n\geq 0}$ est croissante puis qu'elle converge.

17. En déduire que la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

18. Montrer qu'il existe une constante $\lambda \geq 1$ (que l'on ne cherchera pas à déterminer) telle que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda 2^n.$$

Annexe