Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

DS1- 3h00

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x>0, \quad f(x)=\frac{\sqrt{1+2x}-(1+3x)^{\frac{1}{3}}}{x^2}.$$

1. (a) On sait que :

$$\sqrt{1+u}=1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\frac{1}{16}u^3+\underset{u\to 0}{o}(u^3)$$

et $\lim\limits_{x\to 0} 2x=0$. Donc, par composition :

$$\sqrt{1+2x}=1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

De même, on sait que :

$$(1+u)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}u-\frac{1}{9}u^2+\frac{5}{81}u^3+\underset{u\to 0}{o}(u^3)$$

et $\lim\limits_{x\to 0} 3x=0$. Donc, par composition :

$$(1+3x)^{\frac{1}{3}}=1+x-x^2+\frac{5}{3}x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

On obtient alors pour tout $x>0$:

$$\sqrt{1+2x}-(1+3x)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{6}x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

(b) Ainsi on a, pour tout $x>0$:

$$f(x)=\frac{\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{6}x^3\underset{x\to 0}{o}(x^3)}{x^2}=\frac{1}{2}-\frac{7}{6}x+\underset{x\to 0}{o}(x)\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{2}.$$

Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=\dfrac{1}{2}$.

2. Soit $x>0$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{7}{6}x+\underset{x\to 0}{o}(x)-\frac{1}{2}}{x}=-\frac{7}{6}+\underset{x\to 0}{o}(1)\xrightarrow[x\to 0]{}-\frac{7}{6}.$$

Donc (le prolongement de) f est dérivable en 0 et $f'(0)=-\dfrac{7}{6}$.

Exercice 2

Soient p et q deux réels appartenant à l'intervalle $]0,1[$.
On considère un chat domestique dont le propriétaire quitte chaque matin la maison et ne rentre que le soir. Chaque jour, à l'instant du départ de son propriétaire, le chat est confronté à un choix : ou bien rester à la maison ; ou bien décider de passer la journée dehors.
Les ouvertures de la maison étant toutes closes, et la porte d'entrée de la maison ne disposant pas de chatière, le chat devra passer sa journée soit entièrement à l'intérieur, soit entièrement à l'extérieur de la maison.
On se rend compte que, lorsque le chat choisit de rester à l'intérieur de la maison un jour donné, la probabilité qu'il choisisse de rester de nouveau à la maison le lendemain est égale à p. Lorsque le chat passe la journée dehors, la probabilité qu'il décide de rester dans la maison le lendemain vaut q.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les évènements A_n et B_n suivants :

— A_n : « le chat reste à la maison le n-ème jour » ;

— B_n : « le chat passe la journée dehors le n-ème jour ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$a_n = P(A_n) \quad \text{et} \quad b_n = P(B_n).$$

On suppose qu'au premier jour le chat choisit de passer la journée dehors, ainsi $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme le chat n'a que deux options (A_n ou B_n) disjointes alors $\overline{A}_n = B_n$ et par conséquent (A_n, B_n) est un système complets d'événements.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements précédent :

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) \\ &= pP(A_n) + qP(B_n) \\ &= pa_n + q(1-a_n) \end{aligned}$$

2. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = (p-q)a_n + q.$$

La suite (a_n) est donc arithmético-géométrique.

— **Point fixe** : soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$x = (p-q)x + q \Longleftrightarrow x = \frac{q}{1-p+q}$$

car $1-p+q \neq 0$ (vu que p et q sont dans $]0,1[$.

— **Suite auxiliaire :** on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = a_n - \dfrac{q}{1-p+q}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} = a_{n+1} - \frac{q}{1-p+q} &= (p-q)a_n + q - (p-q)\frac{q}{1-p+q} - q \\ &= (p-q)v_n. \end{aligned}$$

Ainsi (v_n) est géométrique de raison $p-q$.

— **Expression de a_n** : on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = (p-q)^{n-1} v_1$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = -\frac{q}{1-p+q}(p-q)^{n-1} + \frac{q}{1-p+q}.$$

3. Comme $-1 < p-q < 1$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} (p-q)^{n-1} = 0.$$

Par conséquent, (a_n) converge vers $\dfrac{q}{1-p+q}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose X_n la variable aléatoire valant 1 si le chat est resté à l'intérieur de n-ième jour et 0 sinon et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre a_n. Son espérance vaut a_n et sa variance $a_n(1-a_n)$.

(b) Il s'agit du nombre de jour que le chat a passé à l'intérieur durant les n premiers jours.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité, en notant $\ell = \dfrac{q}{1-p+q}$:

$$\begin{aligned} E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k &= -\ell \sum_{k=1}^{n} (p-q)^k + (n-1)\ell \\ &= -\ell(p-q)\frac{1-(p-q)^n}{1-p+q} + (n-1)\ell \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} n\ell. \end{aligned}$$

Problème

Soit $\alpha > 0$ un réel fixé. On s'intéresse dans ce problème à la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 \geq 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = \alpha\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right).$$

On considère la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \alpha\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Partie 1 – Généralités

1. La fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

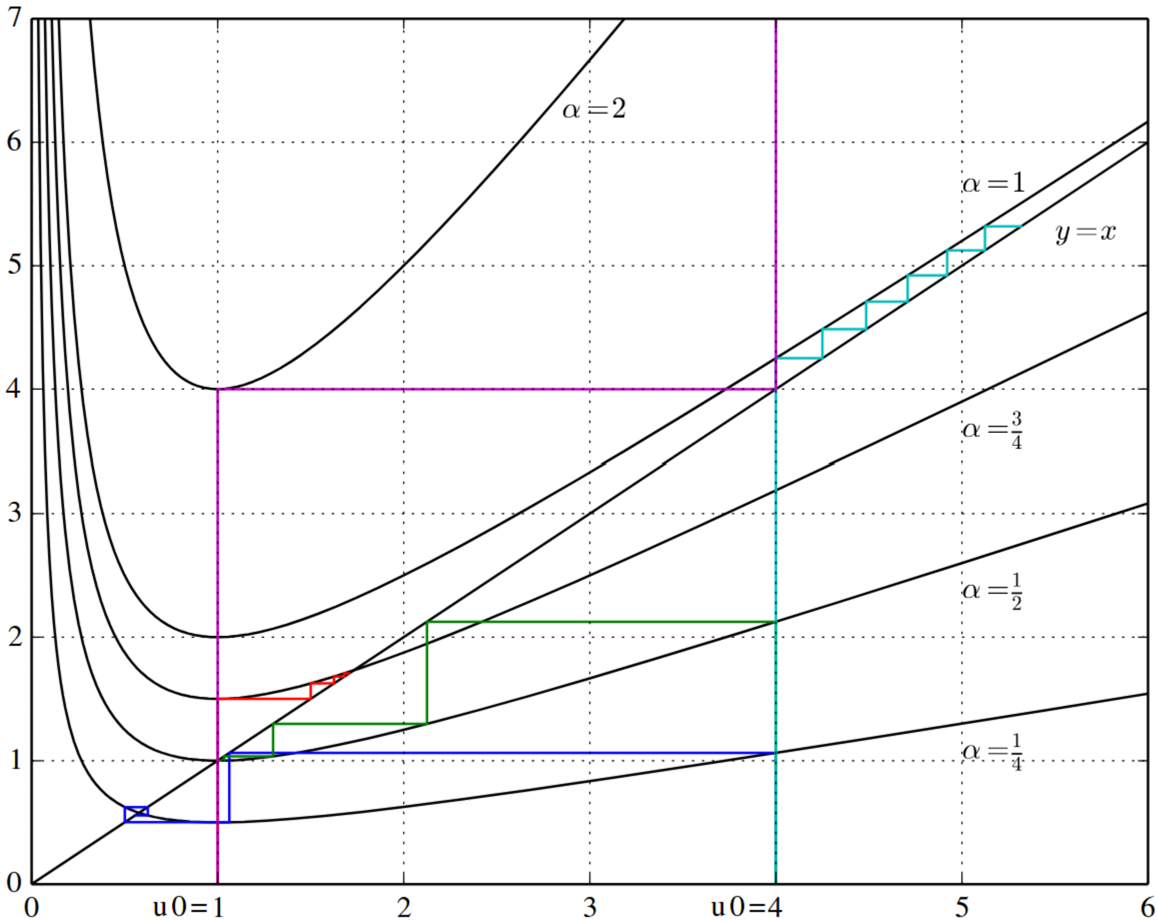
$$\forall x > 0, \quad f'_\alpha(x) = \alpha\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

On en déduit alors facilement :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	2α	$\nearrow$	$+\infty$

2. **(a)** Voir figure.

(b) Voir figure.



(c) On conjecture :

— pour $u_0 = 4$ et $\alpha = \dfrac{1}{4}$, la suite n'est pas monotone mais converge ;

— pour $u_0 = 4$ et $\alpha = \dfrac{1}{2}$, la suite est décroissante et converge ;

— pour $u_0 = 1$ et $\alpha = \dfrac{3}{4}$, la suite est croissante et converge ;

— pour $u_0 = 4$ et $\alpha = 1$, la suite est croissante et diverge vers $+\infty$;

— pour $u_0 = 1$ et $\alpha = 2$, la suite est croissante et diverge vers $+\infty$.

3. Soit $\alpha > 0$ quelconque.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: « u_n est bien définie et $u_n > 0$ ».

— **Initialisation :** c'est immédiat d'après les hypothèses.

— **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ donc $u_{n+1} = f_\alpha(u_n)$ est bien défini. De plus :

$$u_{n+1} = \alpha\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) > 0.$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— **Conclusion :** par le principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$ u_n est bien défini et $u_n > 0$.

(b) Soit $n \geq 1$. D'après la question précédente, $u_{n-1} > 0$ et le tableau de variation de f_α on a :

$$u_n = f_\alpha(u_{n-1}) \geq f_\alpha(1) = 2\alpha.$$

(c) On suppose que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers un réel ℓ. D'après la question précédente, on a par passage à la limite dans les inégalités (larges) :

$$\ell \geq 2\alpha > 0.$$

Comme f_α est continue sur $[2\alpha, +\infty[$ on en déduit, en passant à la limite dans l'identité $u_{n+1} = f_\alpha(u_n)$, que ℓ vérifie :

$$\ell = f_\alpha(\ell).$$

Or :

$$\ell = f_\alpha(\ell) \iff \ell = \alpha\left(\ell + \frac{1}{\ell}\right) \iff \ell^2(1-\alpha) = \alpha.$$

Comme $\alpha > 0$ alors cette équation n'a pas de solution si $\alpha \geq 1$ (car le membre de gauche serait négatif ou nul).

Si $\alpha > 1$ alors $\ell^2 = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ donc $\ell = \sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}$ car on sait que $\ell > 0$.

(d) Si $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ on en déduit donc que (u_n) diverge.

Partie 2 – Cas $\alpha = \frac{3}{4}$.

On suppose dans cette partie que $\alpha = \dfrac{3}{4}$ et que $u_0 = 1$.

4. On a :

$$u_1 = \frac{3}{4}(1+1) = \frac{3}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leq u_{n+1}$ ».

— **Initialisation :** c'est immédiat d'après le calcul de u_1.

— **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n \leq u_{n+1}$. De plus

— si $n \geq 1$ alors par 3.(b) : $u_n \geq 2\alpha = \dfrac{3}{2} \geq 1$;
— si $n = 0$, $u_0 = 1$.

La fonction f_α étant croissante sur $[1, +\infty[$ on a donc

$$u_{n+1} = f_\alpha(u_n) \leq u_{n+2} = f_\alpha(u_{n+1}).$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— **Conclusion :** par le principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq u_{n+1}$.

5. On procède encore par récurrence :

— **Initialisation :** c'est immédiat car $u_0 = 1$.

— **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_n \leq \sqrt{3}$. On a vu à la question précédente que $u_n \geq 1$ donc par croissance de f_α sur $[1, +\infty[$:

$$u_{n+1} = f_\alpha(u_n) \leq f_\alpha(\sqrt{3}) = \sqrt{3}.$$

— **Conclusion :** par le principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq \sqrt{3}$.

6. D'après les questions précédentes, (u_n) est croissante et majorée donc elle converge et d'après 3.(c) sa limite est :

$$\sqrt{\frac{3/4}{1 - 3/4}} = \sqrt{3}.$$

Partie 3 – Cas $\alpha = \frac{1}{2}$.

On suppose dans cette partie que $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

7. Comme $f_\alpha(1) = 1$ on voit que si $u_0 = 1$ la suite (u_n) est constante.

On suppose dans le reste de la partie 3, que $u_0 > 1$.

8. On montre par récurrence, de la même façon qu'à la question 4, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$ (on utilise la croissance stricte de $[1, +\infty[$).

9. On pose, pour tout $n \geq 0$, $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}\right)$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} = \ln\left(\frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1}\right) &= \ln\left(\frac{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) - 1}{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) + 1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n^2 + 2u_n + 1}\right) \\ &= 2ln\left(\frac{u_n^{-}1}{u_n + 1}\right) \\ &= 2v_n. \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison 2.
Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 2^n v_0.$$

(b) On a : $\dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} < 1$ donc $v_0 < 0$. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} 2^n v_0 = -\infty.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$e^{v_n} = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \Longleftrightarrow u_n = \frac{e^{v_n} + 1}{1 - e^{v_n}}.$$

On en déduit que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 1.

Partie 4 – Cas $\alpha = \dfrac{1}{4}$.

Dans cette partie, on reprend l'hypothèse $u_0 \geq 1$.

10. Pour tout $x \geq \dfrac{1}{2}$ on a :

$$f'_\alpha(x) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \leq \frac{1}{4}.$$

Par ailleurs, pour $x \geq \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{x^2} \leq 4$ d'où

$$f'_\alpha(x) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \geq \frac{1}{4}(1-4) = -\frac{3}{4}.$$

11. On pose $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

(a) Voir cours.

(b) D'après 3.(b), on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2\alpha = \dfrac{1}{2}$.

De plus, $\beta \geq \dfrac{1}{2}$.
Soit $n \geq 0$. On applique l'inégalité des accroissements finis entre u_n et β :

$$|f_\alpha(u_n) - f_\alpha(\beta)| \leq \frac{3}{4}|u_n - \beta|.$$

Or $f_\alpha(u_n) = u_{n+1}$ et $f_\alpha(\beta) = \beta$ donc

$$|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{3}{4}|u_n - \beta|.$$

12. **(a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: « $|u_n - \beta| \leq |u_0 - \beta| \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ ».

— **Initialisation :** c'est immédiat.

— **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on sait que $|u_n - \beta| \leq |u_0 - \beta| \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Avec la question précédente :

$$|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{3}{4}|u_n - \beta| \leq |u_0 - \beta| \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}.$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— **Conclusion :** par le principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|u_n - \beta| \leq |u_0 - \beta| \left(\frac{3}{4}\right)^n$..

(b) Par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \beta| = 0$ donc (u_n) converge vers β.

Partie 5 – Cas $\alpha = 2$.

Dans cette section, on suppose que $u_0 > 1$.

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = 2\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) - u_n = u_n + \frac{2}{u_n} > 0$$

car $u_n > 0$.

Ainsi la suite est croissante. On sait déjà qu'elle est divergente donc d'après le théorème de la limite monotone, elle diverge vers $+\infty$.

14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\left(1 + \frac{1}{u_n^2}\right).$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \frac{u_n}{2^n}$.

15. Soit $n \geq 0$.

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n = \frac{u_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{u_n}{2^n} &= \frac{u_{n+1} - 2u_n}{2^{n+1}} \\ &= \frac{2}{2^{n+1}u_n} \end{aligned}$$

Or on sait que $u_n \geq 4 \geq 1$ pour $n \geq 1$ et $u_0 > 1$ donc

$$0 \leq w_{n+1} - w_n = \frac{2}{2^{n+1}u_n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

16. Notons (W_n) cette suite. On a :

$$W_{n+1} - W_n = \sum_{k=0}^{n+1}(w_{k+1} - w_k) - \sum_{k=0}^{n}(w_{k+1} - w_k) = w_{n+2} - w_{n+1} \geq 0.$$

La suite est donc croissante.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n} \leq 2.$$

Ainsi (W_n) est croissante et majorée donc convergente.

17. Par télescopage, pour tout $n \geq 1$:

$$w_n = w_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(w_{k+1} - w_k).$$

Donc (w_n) est somme de deux suites convergentes donc est convergente.

18. Notons λ la limite de la suite (w_n). Comme la suite (w_n) est croissante par l'inégalité de la question 15, on a

$$w_n \geq w_0 = u_0 > 1.$$

Par passage à la limite, on a donc : $\lambda \geq 1$.

Enfin par définition de λ :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{2^n} = \lambda$$

donc $(\lambda \neq 0)$:

$$\frac{u_n}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda \quad \text{donc} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda 2^n.$$

Annexe