Chapitre 2

Intégrales généralisées

2.1 Révisions : intégrales sur un segment

2.1.1 Méthodes de calcul

- **Intégration à vue :** c'est la première méthode à tester. Si F est une primitive de f sur $[a, b]$ alors :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Fonction f	Une primitive de f	sur l'intervalle :
$x \longmapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^a,\ a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$x \longmapsto \dfrac{x^{a+1}}{a+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln(x)$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x \longmapsto e^{ax},\ a \neq 0$	$x \longmapsto \dfrac{e^{ax}}{a}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto a^x,\ a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$	$x \longmapsto \dfrac{a^x}{\ln(a)}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \ln(x)$	$x \longmapsto x\ln(x) - x$	$]0, +\infty[$
$x \longmapsto \sin(x)$	$x \longmapsto -\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos(x)$	$x \longmapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$x \longmapsto \tan(x)$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[,\ k \in \mathbb{Z}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \longmapsto \arctan(x)$	$\mathbb{R}$

Table 2.1 – Primitives usuelles

Fonction f	Une primitive de f	sur tout I tel que :
$u' + v'$	$u + v$	u et v sont dérivables sur I
$\lambda u'$, $\lambda \in \mathbb{R}$	λu	u est dérivable sur I
$u'u^n$, $n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	u est dérivable sur I
$u'u^a$, $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\dfrac{u^{a+1}}{a+1}$	u est dérivable et $u > 0$ sur I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$	u est dérivable et ne s'annule pas sur I
$u'e^u$	e^u	u est dérivable sur I
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	u est dérivable et $u > 0$ sur I
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$	u est dérivable sur I
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$	u est dérivable sur I

Table 2.2 – Primitives de fonctions composées

► **Intégration par parties.**

Proposition 2.1 (Intégration par parties)

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt \;=\; \big[u(t)v(t)\big]_a^b \;-\; \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Effectuer une IPP consiste à écrire la fonction à intégrer sous la forme d'un produit $u'v$ dont :

— l'une sera dérivée ($v \rightsquigarrow v'$)

— l'autre sera intégrée ($u' \rightsquigarrow u$).

Il ne faut pas oublier de préciser le caractère $\mathcal{C}^1$ des fonctions impliquées.

À retenir : quelle fonction dériver, quelle fonction intégrer ?

On retiendra le mot **LATE** (où "A", pour "Algébrique", désigne les fonctions polynomiales).

Face à une intégrale du type $\int fg$, on se réfère au schéma ci-dessus pour savoir laquelle des deux fonctions intégrer et laquelle dériver.

- ► **Changement de variable.**

Proposition 2.2 (Changement de variable)

Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone et soit f une fonction continue sur $u([a,b])$. Alors :

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx \;=\; \int_a^b f(u(t))u'(t)dt.$$

Il ne faut pas oublier de justifier le caractère $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone du changement de variable !

2.1.2 Sommes de Riemann

Proposition 2.3

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt.$$

2.2 Intégrales généralisées

Définition 2.1 (Intégrale généralisée convergente/divergente)

- Soit $a < b \leq +\infty$ et $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

  On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si la limite suivante existe et est finie :

  $$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt.$$

  Dans ce cas, cette limite est appelée la valeur de l'intégrale et est notée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

  Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée diverge.
- Soit $-\infty \leq a < b$ et $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

  On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si la limite suivante existe et est finie :

  $$\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt.$$

  Dans ce cas, cette limite est appelée la valeur de l'intégrale et est notée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

  Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée diverge.
- Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

  On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge s'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ convergent.

  Dans ce cas, la valeur de l'intégrale, notée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$, est égale à

  $$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

  Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée diverge.

2.3 Propriétés des intégrales généralisées

2.3.1 Propriétés élémentaires

Proposition 2.4

Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

1. **Linéarité.** Si $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt$ converge et
$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$$
2. **Relation de Chasles.** Soit $c \in]a, b[$. Alors $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent. Dans ce cas :
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$
3. **Croissance.** On suppose que pour tout $t \in]a, b[$, $f(t) \leq g(t)$ et que $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent. Alors
$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$
4. **Positivité.** On suppose que pour tout $t \in]a, b[$, $f(t) \geq 0$ et que $\int_a^b f(t)dt$ converge. Alors
$$\int_a^b f(t)dt \geq 0$$
avec égalité si et seulement si f est nulle sur $]a, b[$.

2.3.2 Intégration par parties

Proposition 2.5

Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$.
On suppose que :

1. $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)dt$ converge,
2. $t \longmapsto f(t)g(t)$ admet une limite finie en a et en b.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)dt$ converge et :

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = \lim_{t\to b} f(t)g(t) - \lim_{t\to a} f(t)g(t) - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

2.3.3 Changement de variables

Proposition 2.6

Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $\varphi :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $]a, b[$.
On note :

$$c = \lim_{t\to a^+} \varphi(t) \quad ; \quad d = \lim_{t\to b^-} \varphi(t).$$

L'existence de ces limites (qui peuvent valoir $\pm\infty$) est garantie par le théorème de la limite monotone.
Soit f une fonction continue sur $\varphi(]a, b[)$. Alors :

1. $\displaystyle\int_c^d f(u)du$ et $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ sont de même nature.
2. En cas de convergence, elles sont égales.

2.4 Théorèmes de comparaison

Théorème 2.1 (Comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives)

Soit $a < b \leq +\infty$ et $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions **continues et positives**.
On suppose que : $\forall t \in [a, b[: 0 \leq f(t) \leq g(t)$.

1. Si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.
2. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Le résultat analogue pour des fonctions continues et positives sur $]a, b]$ est valable.

Théorème 2.2 (Critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives)

Soit $a < b \leq +\infty$ et $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions **continues et positives**.
On suppose que : $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$.
Alors $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ sont de même nature.
Le résultat analogue pour des fonctions continues et positives sur $]a, b]$ est valable.

2.5 Convergence absolue

Définition 2.2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_I f(t)dt$ est absolument convergente si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_I |f(t)|dt$ est convergente.

Théorème 2.3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
Si $\displaystyle\int_I f(t)dt$ est absolument convergente alors elle est convergente et on a :

$$\left| \int_I f(t)dt \right| \leq \int_I |f(t)|dt.$$