Chapitre 3

Polynômes

Dans tout le chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1 Polynômes

Définition 3.1 (Polynôme)

On appelle polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute fonction $P : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

La liste $(a_0, \dots, a_n)$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ est appelée la liste des coefficients de P.

Notation 3.1

1. Le polynôme $x \in \mathbb{K} \mapsto x$ sera noté X et plus généralement, le polynôme $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ sera noté $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
2. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 3.2 (Degré)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

— Si $\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = 0$, par convention le degré de P est $-\infty$.

— Sinon, le degré de P, noté $\deg(P)$, est l'indice du plus grand coefficient non nul de P :

$$\deg(P) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}.$$

Si P n'est pas égal au polynôme nul alors le coefficient $a_{\deg(P)}$ est appelé le coefficient dominant de P.

Notation 3.2

1. Si $\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = 0$ on dit que P est le polynôme nul et on note $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré **inférieur ou égal** à n.

Proposition 3.1

— Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

— Deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont égaux si et seulement si les listes de leurs coefficients sont égales.

Proposition 3.2 (Opérations)

Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Par convention pour $k \geq p+1$ on considère que $a_k = 0$ et pour $k \geq q+1$ on considère que $b_k = 0$.

1. **Somme**. La somme de P et Q, notée $P+Q$, est le polynôme définie par :

$$P + Q \ :\ x \in \mathbb{K} \longmapsto P(x) + Q(x).$$

Les coefficients de $P+Q$ sont $(a_k + b_k)_{k \in [\![0, \max(p,q)]\!]}$.

2. **Produit**. La somme de P et Q, notée PQ, est le polynôme définie par :

$$PQ \ :\ x \in \mathbb{K} \longmapsto P(x)Q(x).$$

Les coefficients de PQ sont $\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right)_{k \in [\![0, p+q]\!]}$.

3. **Multiplication par un scalaire.** Le polynôme λP est le polynôme définie par :

$$\lambda P \ :\ x \in \mathbb{K} \longmapsto \lambda P(x).$$

Les coefficients de λP sont $(\lambda a_k)_{k \in [\![0, p]\!]}$.

4. **Dérivée.** Le polynôme dérivée de P, noté P' est le polynôme définie par :

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}.$$

Proposition 3.3

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

1. $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$,
2. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$,
3. si $\deg(P) \geq 1$ alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

3.2 Racine et factorisation

Définition 3.3 (Racine)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
On dit que α est une racine de P si $P(\alpha) = 0$.

Proposition 3.4 (Factorisation)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors α est une racine de P si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)Q$.
2. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des racines **distinctes** de P. Alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :
$$P = (X - \alpha_1) \ldots (X - \alpha_p)Q.$$

Corollaire 1

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme **non nul**.
Alors P possède au plus $\deg(P)$ racines distinctes.

Définition 3.4 (Multiplicité d'une racine)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

— On dit que α est une racine de P de multiplicité au moins k s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :
$$P = (X - \alpha)^k Q.$$

— On dit que α est une racine de P de multiplicité k si α est une racine de P de multiplicité au moins k mais n'est pas une racine de P de multiplicité au moins $k + 1$.

— On dit que α est une racine simple de P si sa multiplicité vaut 1 et on dit que c'est une racine multiple si sa multiplicité est supérieure ou égale à 2.

Proposition 3.5

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors

$$\alpha \quad \text{est une racine multiple de } P \iff P(\alpha) = P'(\alpha) = 0.$$

Théorème 3.1 (D'Alembert-Gauss)

Tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ **non constant** possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Corollaire 2

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant.
Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ **toutes** les racines complexes distinctes de P et $m_1, \ldots, m_p \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités respectives.
Alors :

$$P = a \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

où a est le coefficient dominant de P.

Proposition 3.6

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors

$$P(\alpha) = 0 \iff P(\overline{\alpha}) = 0.$$