

BCPST2 – Mathématiques**À rendre le 08/10**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats, étapes importantes, ...doivent être mis en valeurs.

Exercice – Calcul de l'intégrale de Gauss

Le but de l'exercice est de démontrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, appelée l' *intégrale de Gauss*, converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.

Partie 1 – Une inégalité.

Le but de cette partie est de montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - 1 - x \geq 0$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \geq 0, \quad g(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} e^x.$$

- (a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer g' et g'' .
- (b) Étudier les variations de g' et en déduire son signe.
- (c) En déduire que : $\forall x \geq 0, e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2} e^x$.
3. (a) Montrer que $\forall x \geq 0, e^x - e^{-x} \geq 2x$.
- (b) En déduire que pour tout réel x , $e^x - x \leq e^{|x|} - |x|$.
4. Conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}.$$

Partie 2 – Étude d'une fonction définie par une intégrale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

5. Justifier que f est bien définie.
6. Montrer que : $\forall x \geq 0, 0 \leq f(x) \leq e^{-x}$ et en déduire la limite de f en $+\infty$.

7. Soit x et h deux réels. Montrer :

$$0 \leq f(x+h) - f(x) + h \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt \leq 2h^2 e^{2|h|} f(x).$$

Indication : on pourra utiliser le résultat de la partie 1.

8. En déduire que f est dérivable et que :

$$\forall x \geq 0, \quad f'(x) = -e^{-x} \int_0^1 e^{-xt^2} dt.$$

9. Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x^2)$.

(a) Justifier que g est dérivable et déterminer g' .

(b) Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du.$$

Indication : on pourra effectuer un changement de variable.

10. Soit $h : x \in \mathbb{R} \mapsto g(x) + \left(\int_0^x e^{-u^2} du \right)^2$.

(a) Calculer $h(0)$.

(b) Justifier soigneusement que h est dérivable et déterminer sa fonction dérivée.
Que peut-on en déduire sur h ?

Partie 3 – Calcul de l'intégrale de Gauss

11. (a) Montrer que pour tout $x \geq 1$ on a : $e^{-x^2} \leq e^{-x}$.

(b) En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge.

On notera I sa valeur.

12. Soit h la fonction définie à la partie précédente.

Justifier que h admet une limite finie en $+\infty$ qu'on exprimera en fonction de I .

13. En déduire que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

14. En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ puis $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ sont convergente et donner leur valeur.

Exercice 2 – Étude d’une fonction de deux variables

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

Partie 1 – Étude d’une fonction d’une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$. Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites en 0 et $+\infty$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[2, +\infty[$.
On note $g : [2, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1, +\infty[$.
3. (a) Dresser le tableau de variations de g .
(b) Justifier que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]2, +\infty[$.
(c) Soit $s \in [2, +\infty[$.
En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l’équation $f(t) = s$ d’inconnue $t \in]1, +\infty[$. En déduire une expression de $g(s)$ en fonction de s .

Partie 2 – Étude d’une fonction de deux variables

On considère la fonction h de classe $\mathcal{C}^2$ sur le pavé ouvert $U =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ définie par :

$$\forall (x, y) \in U, \quad h(x, y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) (1+x)(1+y).$$

4. Calculer les dérivées partielles d’ordre 1 de h en tout (x, y) de U .
5. Soit $(x, y) \in U$. Montrer : (x, y) est un point critique de h si et seulement si
$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}.$$
6. En déduire que h admet un unique point critique sur U dont on précisera les coordonnées (a, b) .
7. (a) Vérifier : $\forall (x, y) \in U, h(x, y) = 2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right)$.
(b) En déduire que h admet en (a, b) un minimum global sur U .