Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2025-2026

BCPST2 – Mathématiques

À rendre le 08/10

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats, étapes importantes, ...doivent être mis en valeurs.

Exercice – Calcul de l'intégrale de Gauss

Le but de l'exercice est de démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, appelée l' *l'intégrale de Gauss*, converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.

Partie 1 – Une inégalité.

Le but de cette partie est de montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2}e^{|x|}.$$

1. Soit $f : x \longmapsto e^x - 1 - x$, dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^x - 1.$$

On en déduit le tableau de signe et de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi, f admet un minimum global en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq f(0) = 0.$$

De manière équivalente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - 1 - x \geq 0$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \geq 0, \quad g(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}e^x.$$

.

(a) En tant que somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$, g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$g'(x) = e^x - 1 - xe^x - \frac{x^2}{2}e^x$$

et

$$g''(x) = e^x - e^x - xe^x - xe^x - \frac{x^2}{2}e^x = -x\left(2 + \frac{x}{2}\right)e^x.$$

(b) On en déduit en particulier :

x	0		$+\infty$
$g''(x)$	0	$-$	
g'	0	$\searrow$	

En particulier, g' est décroissante et $g'(0) = 0$ donc :

$$\forall x \geq 0, \quad g'(x) \leq 0.$$

(c) D'après la question précédente, on en déduit que g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$g(x) \leq g(0) = 0.$$

Ainsi : $\forall x \geq 0$, $e^x - 1 - x \leq \dfrac{x^2}{2}e^x$.

3. (a) Soit $h : x \longmapsto e^x - e^{-x} - 2x$ définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$h'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \quad ; \quad h''(x) = e^x - e^{-x}.$$

On en déduit par croissance de l'exponentielle que h'' est positive sur $\mathbb{R}^+$ puis :

x	0		$+\infty$
Signe de $h''(x)$		$+$	
Variations de h'	0	$\nearrow$	
Signe de $h'(x)$	0	$+$	
Variations de h	0	$\nearrow$	

En particulier, pour tout $x \geq 0$, $h(x) \geq 0$.

Ainsi : $\forall x \geq 0, \quad e^x - e^{-x} \geq 2x$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$.
Si $x \geq 0$ alors les deux membres de l'inégalité sont égaux.
Si $x < 0$ alors $|x| = -x$ et l'inégalité précédente appliquée à $|x| > 0$ donne :

$$e^{|x|} - e^{-|x|} \geq 2|x|.$$

On a donc

$$e^{|x|} - |x| \geq e^{-|x|} + |x| = e^x - x.$$

Finalement, pour tout réel x, $e^x - x \leq e^{|x|} - |x|$.

4. L'inégalité de gauche a été prouvée à la question **1.**
L'inégalité de droite a été montrée pour les réels positives à la question **2.(c)**.
Soit x un réel négatif. D'après la question précédente et la question **2.(c)**, on a :

$$e^x - 1 - x \leq e^{|x|} - 1 - |x| \leq \frac{|x|^2}{2} e^{|x|} = \frac{x^2}{2} e^{|x|}.$$

Donc l'inégalité de droite est aussi valable pour les réels négatifs.
Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}.$$

Partie 2 – Étude d'une fonction définie par une intégrale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,1]$. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ est bien définie.

6. Soit $x \geq 0$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$1 + t^2 \geq 1 \quad ; \quad e^{-x(1+t^2)} \leq e^{-x}$$

donc

$$0 \leq \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \leq e^{-x}.$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient donc :

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^1 e^{-x} dt = e^{-x}.$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

7. Soit x et h deux réels.

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x)+h\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt &= \int_0^1 \frac{e^{-(x+h)(1+t^2)}}{1+t^2}dt - \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt + h\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\left(e^{-h(1+t^2)}-1+h(1+t^2)\right)dt \end{aligned}$$

Or, pour tout $t\in[0,1]$, en appliquant l'inégalité de la partie 1 avec le réel $-h(1+t^2)$, on a :

$$0 \leq e^{-h(1+t^2)}-1+h(1+t^2) \leq \frac{h^2(1+t^2)^2}{2}e^{|h(1+t^2)|}$$

d'où

$$0 \leq \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\left(e^{-h(1+t^2)}-1+h(1+t^2)\right) \leq \frac{h^2(1+t^2)^2}{2(1+t^2)}e^{|h(1+t^2)|}e^{-x(1+t^2)}.$$

En majorant $1+t^2$ par 2 pour tout $t\in[0,1]$ on obtient finalement :

$$0 \leq \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\left(e^{-h(1+t^2)}-1+h(1+t^2)\right) \leq 2h^2e^{2|h|}\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}.$$

En intégrant entre 0 et 1, on obtient par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq f(x+h)-f(x)+h\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt \leq 2h^2e^{2|h|}f(x).$$

8. Soit $x\geq 0$ et soit $h\neq 0$. D'après la question précédente :

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt\right| \leq 2|h|e^{2|h|}f(x) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Ainsi, par encadrement

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt\right| = 0$$

c'est-à-dire

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt.$$

Cela montre que f est dérivable en x et que :

$$f'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt = -e^{-x}\int_0^1 e^{-xt^2}dt.$$

9. Soit $g : x\in\mathbb{R}\longmapsto f(x^2)$.

(a) La fonction carrée est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}^+$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
Par composition, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$g'(x) = 2xf'(x^2) = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}dt.$$

(b) On va effectuer le changement de variable $u : t \mapsto xt$.

Attention, ce changement de variable n'est pas strictement monotone si $x = 0$! Il faut donc traiter ce cas à part.

— Cas où $x = 0$: par la question précédente $g'(0) = 0$ et l'égalité demandée est bien vérifiée.

— Cas où $x \neq 0$: la fonction $u : t \mapsto xt$ est de classe C^1 et strictement monotone ($u' : t \mapsto x$ donc u est strictement croissante si $x > 0$ et strictement décroissante si $x < 0$). Donc par changement de variable :

$$\begin{aligned} g'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2t^2} dt &= -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2t^2} x dt \\ &= -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-u(t)^2} u'(t) dt \\ &= -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du. \end{aligned}$$

10. Soit $h : x \in \mathbb{R} \longmapsto g(x) + \left(\int_0^x e^{-u^2} du \right)^2$.

(a) On a : $h(0) = g(0) = f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

(b) La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle possède une primitive sur $\mathbb{R}$. Soit F sa primitives s'annulant en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$$

et F est dérivable de dérivée $x \mapsto e^{-x^2}$.

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = g(x) + F(x)^2.$$

Ainsi, h est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} h'(x) = g'(x) + 2F'(x)F(x) &= -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du + 2e^{-x^2} - \int_0^x e^{-u^2} du \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que h est constante sur $\mathbb{R}$.

Partie 3 – Calcul de l'intégrale de Gauss

11. **(a)** Soit $x \geq 1$. Alors

$$x^2 \geq x \quad \text{donc} \quad -x^2 \leq -x$$

et par croissance de la fonction exponentielle :

$$e^{-x^2} \leq e^{-x}.$$

(b) Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$, généralisée en $+\infty$, est convergente.
Soit $A \geq 0$.

$$\int_1^A e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^A = e^{-1} - e^{-A}.$$

Donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-x}dx = e^{-1}$.

Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ converge.

— Les fonctions $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto e^{-x^2}$ sont continues et positives sur $[1, +\infty[$,
— $\forall x \in [1, +\infty[$, $e^{-x} \leq e^{-x^2}$,
— $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ converge.

D'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ converge.

Enfin, comme $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx$ n'est pas une intégrale généralisée, par Chasles, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ converge aussi.
On note I sa valeur.

12. Soit h la fonction définie à la partie précédente. On a pour tout $x \geq 0$:

$$h(x) = g(x) + \left(\int_0^x e^{-u^2}du\right)^2 = f(x^2) + \left(\int_0^x e^{-u^2}du\right)^2.$$

Or :
— d'après la question **6.**, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc par composition :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x^2) = 0;$$

— d'après la question précédente $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-u^2}du$ admet une limite finie en $+\infty$ que l'on a notée I.

Ainsi, par opération sur les limites, h possède une limite en $+\infty$ et :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0 + I^2 = I^2.$$

13. On a vu à la question **10** que h est constante sur $\mathbb{R}$ et que $h(0) = \dfrac{\pi}{4}$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{\pi}{4}.$$

D'après la question précédente on a donc :

$$I^2 = \lim_{x\to+\infty} h(x) = \frac{\pi}{4}.$$

D'où : $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

14. On va effectuer le changement de variable $x : t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{2}}$ qui est bien de classe C^1 et strictement croissant sur $[0, +\infty[$.
D'après le théorème de changement de variable, on sait donc que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\frac{1}{\sqrt{2}}dt$$

sont de même nature et égales en cas de converge.
Comme la première converge d'après les questions précédentes, on en déduit donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\frac{1}{\sqrt{2}}dt$ converge et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
En particulier :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \sqrt{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Enfin, $x \mapsto e^{-x^2/2}$ est une fonction paire et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}dx$ converge. D'après le cours, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}.$$

Exercice 2 – Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

Partie 1 – Étude d'une fonction d'une variable

1. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $t > 0$:

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2-1}{t^2}.$$

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

2. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise donc une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [2,+\infty[$.

3. **(a)** D'après le théorème de la bijection, g est strictement croissante sur $[2,+\infty[$:

x	2		$+\infty$
Variations de f	1	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Soit $s \in [2,+\infty[$, comme f est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$, on sait que g est dérivable en s si $f'(g(s)) \neq 0$ et dans ce cas :

$$g'(s) = \frac{1}{f'(g(s))}.$$

Or d'après le tableau de signe de f' :

$$f'(g(s)) = 0 \iff g(s) = 1 \iff s = 2.$$

Ainsi la fonction g est dérivable sur $]2,+\infty[$ et

$$\forall s > 2, \quad g'(s) = \frac{1}{f'(g(s))}.$$

En particulier, g' est continue sur $]2,+\infty[$ comme quotient et composée de fonctions continues donc g est de classe C^1 sur $]2,+\infty[$

(c) Soit $s \in [2, +\infty[$ et $t \geq 1$.

$$f(t) = s \iff t + \frac{1}{t} = s \iff t^2 - st + 1 = 0$$
$$\iff t = \frac{s - \sqrt{s^2-4}}{2} \quad \text{ou} \quad t = \frac{s + \sqrt{s^2-4}}{2}$$

Or, on a :

$$\frac{s - \sqrt{s^2-4}}{2} = \frac{s^2 - (s^2-4)}{2(s + \sqrt{s^2-4})} = \frac{4}{2(s + \sqrt{s^2-4})} = \frac{2}{s + \sqrt{s^2-4}} \leq 1.$$

Par conséquent, pour $t \geq 1$, on a :

$$f(t) = s \iff t = \frac{s + \sqrt{s^2-4}}{2}.$$

Ainsi $g(s) = \dfrac{s + \sqrt{s^2-4}}{2}$.

Partie 2– Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction h de classe $\mathcal{C}^2$ sur le pavé ouvert $U =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ définie par :

$$\forall (x, y) \in U, \quad h(x, y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1 + x)(1 + y).$$

4. Pour tout $(x, y) \in U$ on a :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{x^2}(1 + x)(1 + y) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1 + y) = (1 + y)\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x^2}\right)$$

et

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{y^2}(1 + x)(1 + y) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1 + x) = (1 + x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y^2}\right).$$

5. Soit $(x, y) \in U$.

$$\begin{aligned}
(x,y) \quad \text{est un point critique de } h \quad &\iff \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (1+y)\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x^2}\right) &= 0 \\ (1+x)\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y^2}\right) &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x^2} &= 0 \quad \text{car 1+y>0} \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y^2} &= 0 \quad \text{car 1+x>0} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y &= x^2 \\ x &= y^2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

6. En poursuivant la question précédente :

$$
\begin{aligned}
(x,y) \quad \text{est un point critique de } h \quad & \iff \left\{ \begin{array}{lcl} y & = & x^2 \\ x & = & y^2 \end{array} \right. \\
& \iff \left\{ \begin{array}{lcl} y & = & x^2 \\ x & = & x^4 \end{array} \right. \\
& \iff \left\{ \begin{array}{lcl} y & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \left\{ \begin{array}{lcl} y & = & 1 \\ x & = & 1 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Mais comme $(0,0) \notin U$, le seul point critique est $(1,1)$.

7. (a) Soit $(x,y) \in U$.

$$
\begin{aligned}
h(x,y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y) &= \frac{1}{x}(1+x)(1+y) + \frac{1}{y}(1+x)(1+y) \\
&= \left(\frac{1}{x} + 1\right)(1+y) + (1+x)\left(\frac{1}{y} + 1\right) \\
&= \frac{1}{x} + \frac{y}{x} + 1 + y + \frac{1}{y} + 1 + \frac{x}{y} + x \\
&= 2 + f(x) + f(y) + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \\
&= 2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right)
\end{aligned}
$$

(b) Comme f admet un minimum global valant 2 (d'après la question 1), on a :

$$\forall (x,y) \in U, \quad h(x,y) \geq 2 + 2 + 2 + 2 = 8 = h(1,1).$$

Ainsi h admet en $(1,1)$ un minimum global sur U.