

# Méthode d'Euler

18 octobre 2025

# Objectif

On s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = F(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

où  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times I$ .

**But** : trouver une solution approchée d'une solution au problème avec Python.

**Données** :  $F$ ,  $y_0$  et  $t_0$ .

## Remarque importante

Si  $y$  est une solution du problème de Cauchy sur un intervalle  $J$  alors pour tout  $t \in J$  et  $t + h \in J$  on a :

$$\begin{aligned} y(t+h) &= y(t) + y'(t)h + o_{h \rightarrow 0}(h) \\ &= y(t) + F(y(t))h + o_{h \rightarrow 0}(h). \end{aligned}$$

Donc pour  $h$  « petit » :

$$y(t+h) \approx y(t) + F(y(t))h.$$

## Principe de la méthode

Sur l'exemple :  $y' = y \ln(y)$  et  $y(0) = e$  avec  $h = 0.3$ .

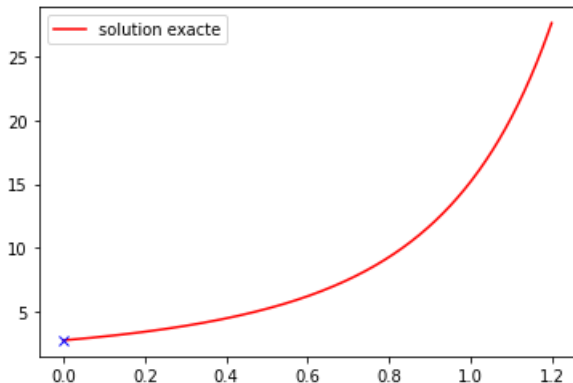
**Connu** $t_0, y_0, F$ **Inconnu** $y$ 

Figure – Initialisation de la méthode

**Connu** $t_0, y_0, F$ **Inconnu** $y(0+h)$ 

Mais :

$$y(0+h) \approx y(0) + y'(0)h = y_0 + F(y_0)h.$$

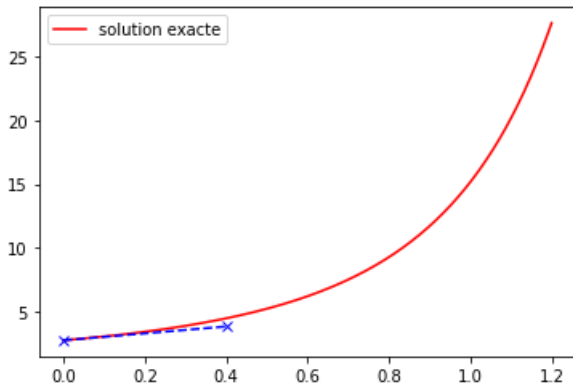


Figure – Après une étape

$$\begin{array}{l} \text{Connu} \\ y_1 = y_0 + F(y_0)h \\ y_2 = ? \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Inconnu} \\ y(0 + h) \\ y(h + h) \end{array}$$

Or :

$$\begin{aligned} y(h + h) &\approx y(h) + y'(h)h \\ &\approx y(h) + F(y(h))h \\ &\approx y_1 + F(y_1)h \end{aligned}$$

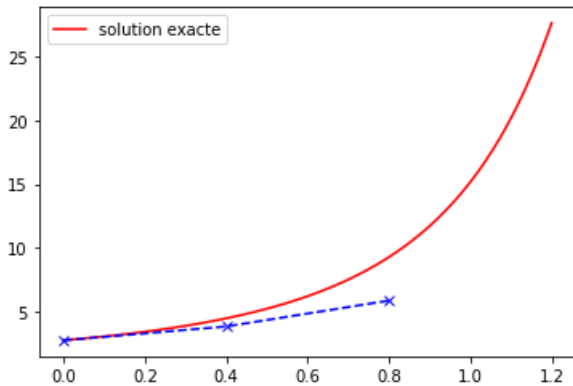


Figure – Après deux étapes

**Connu**

$$y_1 = y_0 + F(y_0)h$$

$$y_2 = y_1 + F(y_1)h$$

$$y_3 = ?$$

**Inconnu**

$$y(0 + h)$$

$$y(h + h)$$

$$y(2h + h).$$

Or :

$$y(2h + h) \approx y(2h) + y'(2h)h$$

$$\approx y(2h) + F(y(2h))h$$

$$\approx y_2 + F(y_2)h$$

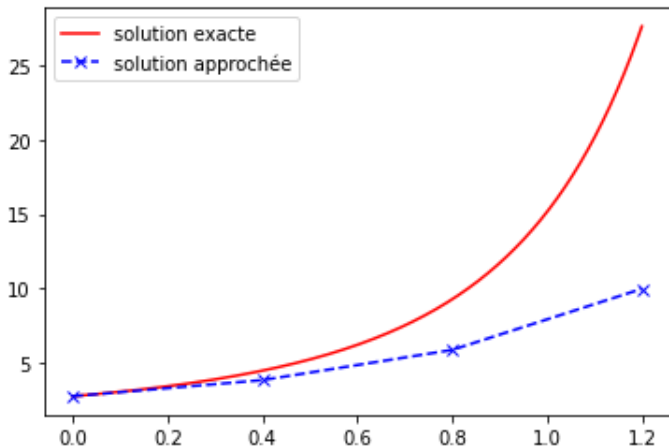


Figure – Après trois étapes

Si on diminue la taille du pas  $h$ , on obtient des solutions approchées plus précises :

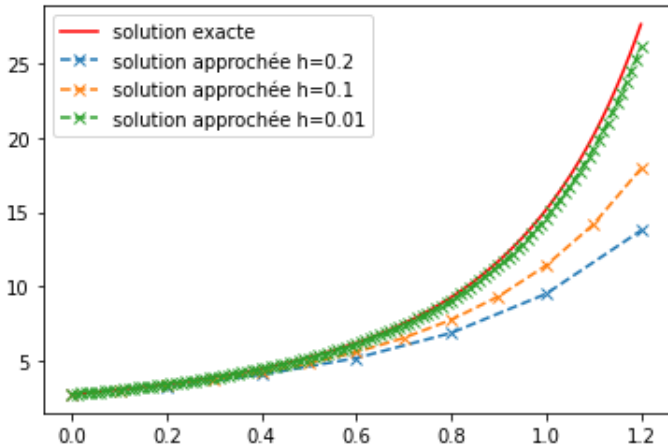


Figure – Comportement quand  $h \rightarrow 0$